Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2journaldemat18liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
quai des Augustins, 55.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XVIII. — ANNÉE 1873.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1873

QA
1
J684
Ser. 2
t. 18

20794
c.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XVIII.

Pages.

Mouvement d'un point matériel sur une ligne fixe, eu égard au frottement; par M. *Dieu*. 1

Sur la fonction cinq fois transitive de 24 quantités; par M. *Émile Mathieu*. . . 25

Addition au Mémoire sur la Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire, etc.; par M. *J. Boussinesq*. 47

Détermination du point critique où est limitée la convergence de la série de Taylor; par M. *Maximilien Marie*. 53

Détermination du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor et des portions des différentes conjuguées comprises dans cette région, ou construction du tableau général des valeurs d'une fonction que peut fournir le développement de cette fonction suivant la série de Taylor; par M. *Maximilien Marie*. 68

Mémoire sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice; par M. *J. Bourget*. 101

Sur la sommation de quelques séries, et sur quelques intégrales définies nouvelles; par M. *J. Graindorge*. 129

Sur une équation différentielle; par M. *Besge*. 139

Sur quelques formules générales qui se rattachent à certaines formes quadratiques (premier article); par M. *J. Liouville*. 142

Sur la Statistique judiciaire; par M. *Ernest Liouville*. 145

Rapport sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon; par M. *Bienaymé*. 164

Rapport sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon; par M. *Bienaymé*. 174

Pages.

Rapport sur deux Mémoires présentés à l'Académie par M. Maximilien Marie, et ayant pour titres, l'un : « Détermination du point critique où est limitée la région de convergence de la série de Taylor », l'autre : « Construction du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor » ; par M. *V. Puiseux*. 180

Note au sujet du Rapport précédent; par M. *Maximilien Marie*. 185

Détermination immédiate, par le principe de correspondance, du nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie; par M. *Chasles*. 202

Note relative à la détermination du nombre des points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie; par M. *Chasles*. 212

Sur la résolution de l'équation du quatrième degré; par M. *G. Darboux*. . . . 220

Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues; par M. *G. Darboux*. 236

Sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement; par M. *Maurice Levy*. 241

Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est égal au module; par M. *J.-A. Serret*. . . 301

Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits; par M. *J. Boussinesq*. 305

Note complémentaire au Mémoire précédent. — Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte des idées exposées au § VI; par M. J. *Boussinesq*. 361

Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la Terre; par M. *Yvon Villarceau*. 393

Sur les fonctions entières irréductibles suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module; par M. *J.-A. Serret*. 437

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

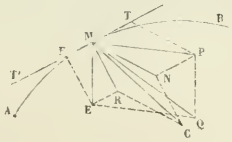
PURES ET APPLIQUÉES.

Mouvement d'un point matériel sur une ligne fixe, eu égard au frottement;

PAR M. DIEU.

1. Soient AB (*fig.* 1) la courbe fixe, M (x, y, z) la position du mobile à la fin du temps t, P la force ou la résultante des forces agissant alors sur lui (angles directeurs α, β, γ), m sa masse, s la longueur de l'arc AM dont l'extrémité A est donnée, et ρ le rayon de courbure de AB en M.

FIG. 1.



Le mobile partant d'une de ses positions sur AB avec sa vitesse dans cette position et rendu libre aurait le mouvement qu'il a effectivement

si, en supprimant la force P, on lui appliquait la force dont les composantes sont $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$. Soit Q cette force.

La force Q peut s'obtenir en composant avec P une force E (angles directeurs λ, μ, ν), qu'on nomme l'*effet* ou l'*action de la courbe* sur le point matériel en mouvement; on a, d'après cela,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{P}\cos\alpha + \mathrm{E}\cos\lambda,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{P}\cos\beta + \mathrm{E}\cos\mu,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{P}\cos\gamma + \mathrm{E}\cos\nu.\end{aligned}\right.$$

Ces équations sont celles du mouvement d'un point libre de masse m sur lequel agissent à la fois les forces P, E. En y joignant les deux équations de la courbe et $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$, on n'a en tout que six équations; cela ne suffit pas, car il y a sept inconnues x, y, z, E, λ, μ et ν.

2. La force appliquée P se décompose en deux : T suivant la tangente en M à AB, N suivant la trace du plan PMT sur le plan normal correspondant. On a

$$(2)\qquad \mathrm{T} = \mathrm{P}\left(\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma\right)$$

pour la première, si on la regarde comme positive ou négative, selon qu'elle est dans le sens du mouvement ou dans le sens opposé. La valeur de la seconde, qu'il convient de regarder toujours comme positive, est donnée par

$$(3)\qquad \mathrm{N} = \mathrm{P}\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma\right)^2},$$

car elle est perpendiculaire à la première.

L'action E de la courbe sur le mobile se décompose de même en

deux forces, l'une F tangentielle, l'autre R suivant la trace du plan EMF sur le plan normal en M. On admet que la première, qu'on nomme le *frottement de la courbe*, est de sens opposé au mouvement; la seconde se nomme la *résistance normale* ou simplement la *résistance* de la courbe (les forces R et N sont en général suivant deux normales différentes).

La force Q est la résultante des quatre forces T, F (tangentielles) et N, R (normales); elle est aussi (mouvement d'un point libre) la résultante de la force positive ou négative $m\frac{dv}{dt}$ correspondant à l'accélération tangentielle et de la force centripète $\frac{mv^2}{\rho}$, v désignant la vitesse du mobile dans la position M; donc $m\frac{dv}{dt}$ *est la résultante de* T, F, *et* $m\frac{v^2}{\rho}$ *celle de* N, R.

De la première partie de cette proposition on conclut immédiatement l'équation

$$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{T} - \mathrm{F}. \tag{4}$$

Multipliant le premier membre par $v\,dt$, le second par ds, on a

$$\tfrac{1}{2}\,dmv^2 = (\mathrm{T} - \mathrm{F})\,ds. \tag{5}$$

Donc *la moitié de la différentielle de la force vive est égale à la différence entre les travaux élémentaires dus à la force appliquée et au frottement de la courbe fixe sur le mobile.*

Si l'on connaissait la loi du frottement, c'est-à-dire si l'on avait l'expression de F en fonction des quantités qui déterminent la force P et la courbe AB, il est clair que l'équation (4) suffirait avec celles de AB pour résoudre le problème, en employant d'ailleurs la formule (3) et des formules connues. L'observation et l'expérience conduisent à admettre, au moins quand v n'est pas trop grand, qu'on a

$$\mathrm{F} = f\,\mathrm{R}, \tag{6}$$

f étant une constante qu'on appelle le *coefficient du frottement*, et qui

doit être assignée pour chaque point matériel et chaque courbe en particulier. Il ne reste alors qu'à chercher l'expression de la force R.

3. N est la résultante de P et d'une force T′ égale et contraire à T; les composantes de T′ suivant les axes ne diffèrent que par le signe de celles de T, savoir : $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$: les composantes de N sont donc $P\cos\alpha - T\frac{dx}{ds}$, $P\cos\beta - T\frac{dy}{ds}$, $P\cos\gamma - T\frac{dz}{ds}$, soit X, Y, Z pour abréger. On tire de ces expressions la valeur de N donnée plus haut, et en les divisant par cette valeur on a les cosinus directeurs.

De même, R est la résultante de la force centripète $\frac{mv^2}{\rho}$ et d'une force N′ égale et contraire à N. La composante de la première suivant l'axe des x est $\frac{mv^2}{\rho}\frac{\rho}{ds}d\frac{dx}{ds} = \frac{mv}{dt}d\frac{dx}{ds}$, puisque le cosinus directeur correspondant est $\frac{\rho}{ds}d\frac{dx}{ds}$, et les composantes suivant les deux autres axes sont évidemment $\frac{mv}{dt}d\frac{dy}{ds}$, $\frac{mv}{dt}d\frac{dz}{ds}$; d'autre part, les composantes de N′ sont $-X$, $-Y$, $-Z$; on a donc pour R

$$\frac{mv}{dt}d\frac{dx}{ds} - X, \quad \frac{mv}{dt}d\frac{dy}{ds} - Y, \quad \frac{mv}{dt}d\frac{dz}{ds} - Z.$$

D'après cela, on trouve

$$(7) \quad R = \sqrt{\frac{m^2v^4}{\rho^2} + N^2 - 2\frac{mv}{dt}P\left(\cos\alpha\, d\frac{dx}{ds} + \cos\beta\, d\frac{dy}{ds} + \cos\gamma\, d\frac{dz}{ds}\right)},$$

en tenant compte de

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = N^2, \quad \frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds} = 0,$$

et

$$\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{ds^2}{\rho^2} = \frac{v^2dt^2}{\rho^2}.$$

Si la courbe AB est plane et si, en outre, la force P est constamment dirigée dans son plan, la force N′ est suivant une des deux parties de

la normale proprement dite, en sorte que R est égal à la somme de N et de $\frac{mv^2}{\rho}$ ou à leur différence prise en valeur absolue. La quantité sous le radical dans la formule précédente est alors un carré; mais il faut avoir soin de mettre à la place de R, pour former chaque équation particulière provenant de l'équation générale,

$$(8) \qquad m\frac{dv}{dt} = \mathrm{T} - f\,\mathrm{R},$$

la valeur positive de la racine. Cela exige une discussion assez minutieuse, comme on le verra par des applications.

Il suffit de changer de signe les composantes de R pour avoir la *pression* du point matériel en mouvement sur la courbe; les composantes de l'action totale sont $\mathrm{P}\cos\alpha - m\frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$, et l'on a encore $\mathrm{E} = \mathrm{R}\sqrt{1+f^2}$.

En égalant respectivement les composantes de la force Q suivant les axes aux sommes des composantes de T, F, N, R, dont Q est la résultante, on ne forme pas des équations distinctes de la précédente. D'une de ces équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = (\mathrm{T} - f\,\mathrm{R})\frac{dx}{ds} + \frac{mv}{dt}\,d\frac{dx}{ds},$$

on tire en effet

$$\mathrm{T} - f\,\mathrm{R} = m\,\frac{\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{v}{dt}\,d\frac{dx}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = m\,\frac{\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{ds}{dt}\,\frac{d\left(\frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt}\right)}{dt}}{\frac{dx}{ds}}$$

$$= \frac{\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{ds}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\,\frac{d^2s}{dt^2}\right) : \frac{ds}{dt}}{\frac{dx}{ds}} = m\frac{d^2s}{dt^2},$$

et les deux autres donneront évidemment le même résultat.

4. Quelle que soit la courbe fixe AB, si le mobile arrive ou est placé

sans vitesse dans une position M, et si alors la composante tangentielle de la force appliquée P ne surpasse pas le frottement, il reste en repos dans cette position. Le frottement est, en effet, une *force passive* influant sur le mouvement quand il existe, mais incapable de le produire, et qui ne peut, dans le cas dont il s'agit, que faire équilibre à la composante tangentielle. L'équilibre ne s'établit pas seulement lorsque la composante tangentielle et le frottement sont de sens contraires quand la vitesse va s'annuler, mais encore lorsque ces forces sont de même sens; le frottement, dans ce dernier cas, change brusquement de sens à l'instant où la vitesse devient nulle.

Soit θ l'angle, nécessairement entre O et $\frac{\pi}{2}$, des directions de P et de N; on a $T = \pm P \sin\theta$ et $N = P\cos\theta$. Le frottement étant proportionnel à la pression, on a $F = fP\cos\theta$ lorsque $v = 0$, car alors $R = N$; la condition d'équilibre $F \gtrless T$ revient donc à $f \gtrless \tang\theta$. Soit encore λ l'angle aigu pour lequel $\tang\lambda = f$, et qu'on nomme l'*angle du frottement*, on a $\tang\theta \gtrless \tang\lambda$ ou enfin $\theta \gtrless \lambda$. D'après cela, si l'on décrit autour de TT', tangente en M à la courbe AB, le cône de révolution dont M est le sommet et dont le demi-angle est égal à $\frac{\pi}{2} - \lambda$, le point matériel arrivant en M sans vitesse y reste en équilibre quand la force P est dirigée hors de ce cône, quelle que soit sa grandeur; tandis que le mouvement continue sans interruption, soit dans le sens où il avait lieu lors de l'arrivée en M, soit dans le sens contraire, quand la direction de P est intérieure par rapport au cône. Dans le premier cas, le point matériel serait remis en mouvement par une variation de la force P, en suite de laquelle sa direction viendrait dans le cône.

Lorsque la direction de P est constante, la courbe AB se partage facilement en parties telles que l'angle θ est inférieur à λ sur les unes et, au contraire, supérieur à λ sur les autres; les premières renferment toutes les positions où il est possible que le mobile s'arrête.

5. *Prenons pour* AB *une droite indéfinie,* P *étant une force quelconque.*

En désignant par θ l'angle des directions de P et de sa composante normale N, et en considérant cet angle comme positif ou négatif, selon

que la composante T se trouve dans le sens du mouvement ou dans le sens opposé, on a toujours

$$T = P \sin\theta, \quad N = P \cos\theta.$$

R est égal à N, car le rayon ρ est infini. L'équation (8) du n° 3 donne, d'après cela,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{m \cos\lambda} \sin(\theta - \lambda).$$

On n'a pas besoin d'une définition précise de la force P pour déduire de cette formule les circonstances essentielles du mouvement :

1° Si $\theta - \lambda$ est toujours positif, la vitesse croît sans cesse.

2° Si $\theta - \lambda$ est toujours nul, c'est-à-dire si la direction de P est toujours sur le cône du frottement (n° 4), le mouvement est uniforme.

3° Lorsque $\theta - \lambda$ est susceptible de valeurs négatives, la vitesse peut devenir nulle dans une certaine position. S'il en est ainsi, le point matériel reste en équilibre dans cette position quand on a ensuite $\theta^2 \leq \lambda^2$, ou bien le mouvement continue soit dans le sens précédent quand on a $\theta > \lambda$, soit en sens contraire quand on a $-\theta > \lambda$.

4° Lorsque $\theta - \lambda$ est toujours négatif, au moins à partir d'un certain instant, la vitesse finit nécessairement par devenir nulle, et alors l'équilibre ou le mouvement en sens contraire s'établit indéfiniment.

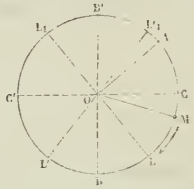
En particulier, quand la force P est constante, ou du moins quand P et θ ont des valeurs constantes, le mouvement est uniforme si l'on a $\theta = \lambda$, uniformément varié si l'on a $\theta \gtrless \lambda$. Pour $\theta > \lambda$, il continue indéfiniment dans le sens initial; pour $-\lambda < \theta < \lambda$, il cesse et le point reste en équilibre dans une certaine position où la vitesse est devenue nulle; enfin, pour $\theta < -\lambda$, il change de sens à partir de cette position, et continue ensuite indéfiniment de B vers A.

6. *La ligne fixe* AB *est une circonférence située dans un plan vertical, et la force* P *est le poids du mobile.*

Soient A (*fig.* 2) la position initiale du mobile, M sa position à la fin du temps t compté depuis l'instant où le mouvement commence, B et B′ le point le plus bas et le point le plus haut de la circonférence.

La position M sera déterminée par l'angle au centre AOM représenté par θ, qui sera regardé comme négatif de A en B et positif au delà

Fig. 2.



de B, si le mobile peut dépasser cette position, ce qui dépend de la grandeur de la vitesse initiale.

On a $v = a\frac{d\theta}{dt}$, le rayon de la circonférence étant représenté par a, et $P = mg$, $T = -mg\sin\theta$, $N = mg\cos\theta$ si l'on considère N comme positif ou négatif, selon qu'il se trouve sur le prolongement extérieur du rayon (positions au-dessous du diamètre horizontal CC') ou de M vers O (positions au-dessus de CC').

La force centripète est exprimée par $ma\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, et il suffit d'ajouter $mg\cos\theta$ pour avoir la force R considérée de la même manière que N; on aura donc toujours

$$F = fm\left[a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\cos\theta\right],$$

si toutefois on admet que f représente ici le coefficient du frottement pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, selon que la quantité $a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\cos\theta$ aura une valeur positive ou bien une valeur négative.

L'équation générale (8) du n° 3 donne, d'après cela,

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + f\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{a}(\sin\theta + f\cos\theta) = 0.$$

Cette équation convient à tout le mouvement de A vers B sous la convention qui vient d'être indiquée pour f; elle s'applique même, comme on va le voir, au retour dans le sens contraire, lorsqu'il a lieu.

En posant $\frac{d\theta}{dt} = y^{\frac{1}{2}}$, d'où $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dy}{d\theta}$, il vient

$$\frac{dy}{d\theta} + 2fy + \frac{2g}{a}(\sin\theta + f\cos\theta) = 0,$$

dont l'intégrale générale, facile à calculer, est

$$y = Ce^{-2f\theta} + \frac{2g}{a(1+4f^2)}[(1-2f^2)\cos\theta - 3f\sin\theta];$$

on a donc

$$(2) \qquad v^2 = \frac{2ga}{1+4f^2}[ce^{-2f\theta} + (1-2f^2)\cos\theta - 3f\sin\theta].$$

Avant de chercher comment il faut disposer de la constante arbitraire c pour avoir la valeur de v correspondant à chaque valeur de θ, quelques remarques sont nécessaires :

1° LL_1, $L'L'_1$ étant les diamètres qui font avec BB′ des angles égaux à λ, les positions dans lesquelles le point matériel restera en équilibre, s'il y arrive sans vitesse, sont toutes sur les deux arcs LL′, $L_1L'_1$, où le frottement, qui se réduit à $fmg\cos\theta$ pour $v = 0$, surpasse en valeur absolue la composante tangentielle.

2° Le mouvement ayant lieu dans le sens indiqué par la flèche, la composante tangentielle est de sens contraire au frottement sur LB et $B'L'_1$, mais elle a une grandeur moindre, et sur BL′B′ elle est de même sens; la vitesse sera donc partout décroissante sur $LL'L'_1$.

3° La vitesse ne peut aller en croissant que sur L'_1L, mais il n'est pas impossible qu'elle soit décroissante au moins sur une partie de cet arc; il est facile de voir qu'elle n'y deviendra nulle dans aucune position. Le mobile ne peut effectivement rester nulle part en équilibre sur L'_1L; le mouvement devrait donc continuer au delà de toute position où la vitesse y serait nulle, en sorte que zéro serait un minimum

de v^2; or l'équation $v^2 = 0$, c'est-à-dire

$$ce^{-2f\theta} + (1 - 2f^2)\cos\theta - 3f\sin\theta = 0,$$

et l'équation $\frac{d(v^2)}{d\theta} = 0$, c'est-à-dire

$$2fce^{-2f\theta} + (1 - 2f^2)\sin\theta + 3f\cos\theta = 0,$$

qui devraient, d'après cela, être vérifiées simultanément, donnent, par l'élimination de $e^{-2f\theta}$,

$$\operatorname{tang}\theta + f = 0, \quad \text{d'où} \quad \theta = -\lambda,$$

ce qui, en général, ne satisfait pas, et du reste conduirait au point L.

5° La vitesse devenant nulle pour une position sur $L'L_1$, ce qui peut n'avoir lieu qu'après un certain nombre de révolutions, le mobile reviendra de cette position vers le point B, car la composante tangentielle tend à déterminer le mouvement dans ce sens et surpasse le frottement contraire. L'intégrale particulière qui aura donné v, au moins depuis un certain temps jusqu'à l'instant dont il s'agit, ne pourra plus servir; il est, en effet, évident que la vitesse du mobile, lorsqu'il revient en sens contraire dans une position où il a passé, ne saurait reprendre la même valeur.

Soient f_1 la valeur positive de f, $-\alpha$ et v_0 les valeurs initiales de θ et de v. Si la quantité $\frac{v_0^2}{a} + g\cos\alpha$ est positive, il faut prendre $f = f_1$ dans l'équation (2), et la constante c est d'abord donnée par

$$(3) \qquad c = e^{-2f_1\alpha}\left[\frac{1 + 4f_1^2}{2ga}v_0^2 - (1 - 2f_1^2)\cos\alpha - 3f_1\sin\alpha\right];$$

mais pour $\frac{v_0^2}{a} + g\cos\alpha < 0$ (le point A est au-dessus de C), il faut premièrement prendre $f = -f_1$ dans l'équation (2), et l'on a

$$(4) \qquad c = e^{2f_1\alpha}\left[\frac{1 + 4f_1^2}{2ga^2}v_0^2 - (1 - 2f_1^2)\cos\alpha + 3f_1\sin\alpha\right].$$

Dans ce cas, la quantité $\frac{v^2}{a} + g\cos\theta$, d'abord négative à partir de $\theta = -\alpha$, passe par zéro pour une valeur $-\theta'$ de θ entre $-\alpha$ et $-\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à l'équation $\frac{v^2}{a} + g\cos\theta = 0$, puis devient positive. A partir de $\theta = -\theta'$, il faut prendre $f = f_1$ dans l'équation (2) et

$$(5) \qquad c = e^{-2f_1\theta'}\left[\frac{1+4f_1^2}{2ga}v'^2 - (1-2f_1^2)\cos\theta' - 3f_1\sin\theta'\right],$$

v' désignant la valeur de v donnée par cette équation quand f et c sont déterminés, comme il vient d'être dit, pour le mouvement qui a lieu depuis $\theta = -\alpha$ jusqu'à $\theta = -\theta'$.

La constante c étant déterminée de l'une ou de l'autre des manières qui viennent d'être indiquées, suivant le cas qui se présente, on doit résoudre l'équation $v^2 = 0$, c'est-à-dire

$$ce^{-2f_1\theta} + (1-2f_1^2)\cos\theta - 3f_1\sin\theta = 0,$$

en s'aidant, si l'on veut, des courbes

$$y = ce^{-2f_1x}, \quad Y = 3f_1\sin x - (1-2f^2)\cos x.$$

Cette équation ne peut avoir de racine entre $-\alpha$ et $-\lambda$, d'après ce qui a été dit plus haut. Si elle en a une entre $-\lambda$ et λ, cette racine détermine une position entre L et L', où le mobile s'arrêtera et restera en équilibre. Si elle a une racine θ'' entre λ et $\pi - \lambda$, et si, en outre, $\frac{v^2}{a} + g\cos\theta$ reste positif jusqu'à $\theta = \theta''$, cette racine donne une position entre L' et L, d'où le mobile reviendra vers B. Si, au contraire, la quantité $\frac{v^2}{a} + g\cos\theta$ devient négative à partir d'une valeur θ_1 de θ, nécessairement supérieure à $\frac{\pi}{2}$, jusqu'à laquelle il ne se trouve pas de racine de l'équation précédente, il faut revenir à $f = -f_1$ et prendre

$$c = e^{2f_1\theta_1}\left[\frac{1+4f_1^2}{2ga}v_1^2 - (1+2f_1^2)\cos\theta_1 - 3f_1\sin\theta_1\right],$$

v_1 désignant la valeur de v qui résulte de l'équation (2) pour $f = f_1$ et de la formule (5).

On aura alors à résoudre l'équation

$$ce^{2f_1\theta} + (1 - 2f_1^2)\cos\theta + 3f_1 \sin\theta = 0.$$

Si elle a une racine inférieure à $\pi - \lambda$, cette racine détermine une position au-dessous de L_1, d'où le mobile revient vers B. Quand il y a seulement une racine entre $\pi - \lambda$ et $\pi + \lambda$, le mobile arrive à une position entre L_1 et L'_1, où il reste en équilibre. Enfin, si aucune valeur ne satisfait jusqu'à $\pi + \lambda$, le mobile dépasse L'_1, et tout ce qui précède s'applique en considérant cette position comme initiale, la vitesse qui y est acquise étant prise pour v_0 et $\pi - \lambda$ pour α.

Lorsque le mobile revient d'une position sur $L'L_1$ vers le point B, l'équation (2) convient à ce retour, pourvu que l'on considère θ comme négatif à gauche de BB′ et positif à droite. Si l'on désigne, comme plus haut, par θ'' la valeur correspondant à la position dont il s'agit, la constante c sera pour le retour déterminée d'abord par la condition que $v = 0$ réponde à $\theta = -\theta''$, f ayant la dernière valeur (f_1 ou $-f_1$) qu'il a fallu prendre.

Le cas d'une position initiale sur LB ou même BC′B′ est compris dans la discussion précédente, qui s'applique, par conséquent, *mutatis mutandis*, à une vitesse initiale de sens contraire à la flèche.

De l'équation (2) et de la formule $v = a\frac{d\theta}{dt}$ on déduit

$$t = \sqrt{\frac{a(1 + 4f^2)}{2g}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{ce^{-2f\theta} + (1 - 2f^2)\cos\theta - 3\sin\theta}}.$$

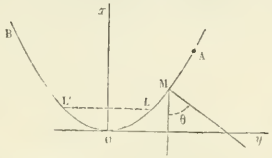
Il faudra prendre pour f dans cette formule tantôt $-f_1$, tantôt f_1, et successivement pour c les valeurs indiquées ci-dessus, du moins en général; t aura donc des expressions différentes pendant les périodes successives du mouvement. Lorsqu'on doit, par exemple, premièrement donner à f la valeur $-f_1$ en attribuant à c la valeur fournie par la formule (4), on n'aura t que jusqu'à l'instant où $\theta = -\theta'$; puis, en prenant ensuite $f = f_1$ et en tirant c de la formule (5), on aura le

temps qui s'écoule depuis cet instant jusqu'à celui qui répond à une position quelconque du mobile dans la seconde période du mouvement; et ainsi de suite. Enfin la limite inférieure de l'intégration sera d'abord $-\alpha$, puis $-\theta'$, etc.

7. *La courbe fixe* AB *est une parabole dont l'axe est vertical et de sens opposé à la pesanteur; la force* P *est le poids du mobile.*

Soient Ox, Oy (*fig.* 3) l'axe et la tangente au sommet O. L'arc AM

Fig. 3.



compris entre les positions du mobile à l'origine du mouvement et à la fin du temps t étant désigné par s, et l'angle que la partie extérieure de la normale fait avec la direction de la pesanteur par θ, on a

$$\frac{dx}{ds} = -\sin\theta, \quad \frac{dy}{ds} = -\cos\theta \quad \text{et} \quad T = mg\sin\theta, \quad N = mg\cos\theta,$$

en considérant θ comme positif de A en O et négatif au delà de O.

De l'équation $y^2 - 2px = 0$ de la parabole on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$; on a donc

$$y = p\,\mathrm{tang}\,\theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{p}{\cos^2\theta}.$$

Divisant membre à membre cette dernière formule et la seconde de celles qui précèdent, il vient

$$\frac{ds}{d\theta} = -\frac{p}{\cos^3\theta}, \quad \text{d'où} \quad v = -\frac{p}{\cos^3\theta}\frac{d\theta}{dt}.$$

Des formules connues $n = \frac{p}{\cos\theta}$, $\rho = \frac{n^2}{p^2}$, où n représente la normale,

il résulte $\rho = \frac{p}{\cos^3\theta}$. On a donc la formule

$$R = m\left[\frac{p}{\cos^3\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\cos\theta\right],$$

qui donnera toujours pour R une valeur positive, puisque θ reste entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

L'équation du mouvement est, d'après cela [(8), n° 3],

$$pD_t\left(\frac{1}{\cos^3\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) + g\sin\theta - f\left[\frac{p}{\cos^3\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\cos\theta\right] = 0,$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + (3\tang\theta - f)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{p}(\tang\theta - f)\cos^4\theta = 0.$$

En posant $\frac{d\theta}{dt} = z^{\frac{1}{2}}$, d'où $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dz}{d\theta}$, on passe à l'équation linéaire

$$\frac{dz}{d\theta} + 2(3\tang\theta - f)z + \frac{2g}{p}(\tang\theta - f)\cos^4\theta = 0.$$

Comme $2\int(3\tang\theta - f)d\theta = -l\cos^6\theta - 2f\theta + \text{const.}$, l'intégrale générale est d'abord

$$z = e^{2f\theta}\cos^6\theta\left(C - \frac{2g}{p}\int e^{-2f\theta}\frac{\tang\theta - f}{\cos^2\theta}d\theta\right)$$

d'après la règle connue, et en effectuant l'intégration indiquée on a

$$z \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(Ce^{2f\theta}\cos^2\theta - \frac{g}{p}\right)\cos^4\theta.$$

Il faut que la constante C satisfasse à

$$\frac{v_0^2}{p^2}\cos^2\alpha = Ce^{2f\alpha}\cos^2\alpha - \frac{g}{p}, \quad \text{d'où} \quad C = \left(\frac{v_0^2}{p} + g\,\text{séc}^2\alpha\right)\frac{e^{-2f\alpha}}{p};$$

car on doit avoir $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_0\cos^3\alpha}{p}$ pour $\theta = \alpha$, v_0 et α désignant les va-

leurs initiales de v et de θ; la vitesse est donc déterminée en fonction de θ par la formule

$$(2) \qquad v^2 = p^2 C e^{2f\theta} - pg \operatorname{séc}^2\theta,$$

en conservant C pour abréger au lieu de sa valeur.

Il résulte de l'équation générale (8), n° 3, et des expressions particulières de T et de R, que la quantité $\frac{dv}{dt}$, si elle est d'abord positive, devient négative à partir d'une certaine valeur de θ entre α et zéro; lorsque la vitesse ne décroît pas tout d'abord, elle finit donc par devenir décroissante à partir d'un maximum correspondant à une valeur de θ satisfaisant à l'équation $\frac{d(v^2)}{d\theta} = 0$ ou

$$(3) \qquad fpCe^{2f\theta} - \frac{g \sin\theta}{\cos^3\theta} = 0.$$

On aura $v = 0$, c'est-à-dire

$$(4) \qquad pCe^{2f\theta} - g \operatorname{séc}^2\theta = 0$$

pour une valeur θ' de θ entre α et $-\frac{\pi}{2}$, car le premier membre de cette équation, positif pour $\theta = \alpha$, devient infini négativement si l'on donne à θ la valeur $-\frac{\pi}{2}$.

Soient L et L' les points de la parabole où la tangente a sur Oy une inclinaison égale à l'angle du frottement λ, et où, par conséquent, $\theta = \pm\lambda$. La valeur θ' ne peut pas surpasser λ, car le mobile, arrivant sans vitesse dans la position entre A et L déterminée par cette valeur, ne pourrait y rester en équilibre, en sorte que la valeur nulle de v^2 correspondante serait un minimum, et devrait satisfaire aux équations (3) et (4); or l'élimination de l'exponentielle entre elles donne $f - \operatorname{tang}\theta = 0$, d'où $\theta = \lambda$, ce qui, en général, ne satisfait pas à l'équation (3) et détermine d'ailleurs le point L.

Si θ' est entre λ et $-\lambda$, sans exclure ces limites, le mobile s'arrête et reste en équilibre dans la position sur LL' déterminée par $\theta = \theta'$.

Pour $\theta' < -\lambda$, le mobile, parvenu sans vitesse dans la position correspondant à $\theta = \theta'$ sur L'B, revient de cette position vers A. Les équations précédentes s'appliquent toutes à ce retour en prenant $v_0 = 0$, et ponr α la valeur absolue de θ', si l'on considère θ comme positif à gauche de Ox et négatif à droite.

Quand la position initiale A est sur LOB, la vitesse décroît dès l'origine du mouvement. La discussion précédente subsiste du reste; on n'a donc pas besoin de considérer à part le cas d'une vitesse initiale telle, que le mobile remonte d'abord sur la courbe.

Pendant le mouvement de A vers B, on a

$$t = p \int_{\theta}^{\alpha} \frac{d\theta}{\cos^2\theta \sqrt{Ce^{2f\theta}\cos^2\theta - \frac{g}{p}}},$$

et lorsque le mobile revient d'une position extrême sur OB vers le point O, le temps écoulé depuis l'instant où le retour commence est donné par

$$t = \sqrt{\frac{p}{g}} \int_{\theta}^{-\theta'} \frac{d\theta}{\cos^2\theta \sqrt{\sec^2\theta' \cos^2\theta\, e^{2f(\theta'+\theta)} - 1}}.$$

8. *La courbe fixe est une cycloïde dont l'axe est vertical et de sens opposé à la pesanteur; la force est le poids du mobile.*

Si l'on prend les axes des coordonnées comme dans le cas de la parabole et le même angle auxiliaire, les quatre premières formules du numéro précédent s'appliquent. En désignant par a le rayon du cercle générateur, on a

$$x = a(1 - \cos 2\theta), \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{d\theta} = 4a \sin\theta \cos\theta, \quad \text{et} \quad \rho = 4a\cos\theta.$$

D'après cela,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} : \frac{dx}{ds} = -4a\cos\theta, \quad v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -4a\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{v^2}{\rho} = 4a\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad R = m\left[4a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\right]\cos\theta.$$

L'équation générale [(8), n° 3] donne, par conséquent,

$$\frac{d\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} - f\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{4a}(\sin\theta - f\cos\theta) = 0,$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} - (\operatorname{tang}\theta + f)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{4a}(\operatorname{tang}\theta - f) = 0.$$

Si l'on pose $\frac{d\theta}{dt} = z^{\frac{1}{2}}$, d'où $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dz}{d\theta}$, cette équation se ramène à

$$\frac{dz}{d\theta} - 2(\operatorname{tang}\theta + f)z + \frac{g}{2a}(\operatorname{tang}\theta - f) = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = e^{2f\theta}\sec^2\theta\left[C - \frac{g}{2a}\int(\operatorname{tang}\theta - f)e^{-2f\theta}\cos^2\theta\, d\theta\right],$$

car

$$2\int(\operatorname{tang}\theta + f)d\theta = 2f\theta - l\cos^2\theta + \text{const.}$$

Mais, abstraction faite des constantes arbitraires, on a

$$\begin{aligned}\int(\operatorname{tang}\theta - f)e^{-2f\theta}\cos^2\theta\, d\theta &= \tfrac{1}{2}e^{-2f\theta}\sin^2\theta - f\int e^{-2f\theta}\cos 2\theta\, d\theta\\ &= \tfrac{1}{2}e^{-2f\theta}\left(\sin^2\theta - f\frac{\sin 2\theta - f\cos 2\theta}{1+f^2}\right)\\ &= \frac{e^{-2f\theta}}{2(1+f^2)}(\sin\theta - f\cos\theta)^2 = \tfrac{1}{2}e^{-2f\theta}\sin^2(\theta - \lambda).\end{aligned}$$

L'intégrale première de l'équation (1) est donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{4a}\,\frac{ce^{2f\theta} - \sin^2(\theta - \lambda)}{\cos^2\theta},$$

c étant la constante arbitraire.

v_0 et α désignant les valeurs initiales de v et de θ, on doit avoir $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_0}{4a\cos\alpha}$ pour $\theta = \alpha$; il faut donc prendre

$$c = \left[\frac{v_0^2}{4ga} + \sin^2(\alpha - \lambda)\right]e^{-2f\alpha},$$

et l'on a

$$(2) \qquad v^2 = 4ga[ce^{2f\theta} - \sin^2(\theta - \lambda),$$

en laissant c au lieu de sa valeur, pour abréger.

D'après l'équation générale précitée et les valeurs particulières de T et de R, la vitesse doit finir par diminuer sur AO, quand elle n'est pas tout d'abord décroissante. Soient L et L′ les points de la cycloïde où l'inclinaison de la tangente sur Oy est égale à l'angle du frottement. On voit, comme pour la circonférence et la parabole, que la vitesse ne deviendra pas nulle sur AL. Le mouvement devant continuer au delà d'une position sur AL où l'on aurait $v = 0$, une valeur nulle de v^2 sur cet arc serait effectivement un minimum, en sorte que la valeur correspondante de θ devrait satisfaire aux deux équations $v^2 = 0$, $\frac{d(v^2)}{d\theta} = 0$, c'est-à-dire

$$(3) \quad ce^{2f\theta} - \sin^2(\theta - \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad cfe^{2f\theta} - \sin(\theta - \lambda)\cos(\theta - \lambda) = 0,$$

par conséquent à

$$\sin(\theta - \lambda)[f\sin(\theta - \lambda) - \cos(\theta - \lambda)] = 0,$$

qui s'en déduit par l'élimination de $e^{2f\theta}$; or cette dernière équation n'est évidemment vérifiée que par $\theta = \lambda$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, ce qui ne donne pas $v = 0$.

Si le résultat $ce^{-\pi f} - \cos^2\lambda$ de la substitution de $-\frac{\pi}{2}$ à θ dans le premier membre de l'équation (3) était positif, la vitesse ne deviendrait pas nulle sur la demi-cycloïde OB, et le mobile arriverait avec la vitesse $2\sqrt{ga(ce^{-\pi f} - \cos^2\lambda)}$ à son extrémité B, par laquelle il pourrait s'échapper. Si l'on a, au contraire,

$$ce^{-\pi f} - \cos^2\lambda < 0,$$

il y aura une racine θ' de l'équation (3) entre λ et $-\frac{\pi}{2}$, puisque $\theta = \lambda$ donne le résultat positif $ce^{2f\lambda}$, et le mobile arrivera sans vitesse dans une certaine position D sur LOB. Dans ce dernier cas, lorsque θ' est compris entre λ et $-\lambda$, le mobile reste en équilibre dans la position D

qui se trouve sur LL', et lorsqu'on a $\theta' < -\lambda$, il revient de D, situé alors sur L'B, vers le point O. La formule (2) convient à ce retour en prenant $c = e^{-2f\theta'}\sin^2(\theta' - \lambda)$.

La discussion précédente comprend le cas d'une position initiale sur LO ou sur OB, dans lequel la vitesse est immédiatement décroissante.

Si le mobile partait sans vitesse d'une position sur LA ou L'B, on aurait

$$dt = -2\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{c' e^{2f\theta} - \sin^2(\theta - \lambda)}},$$

c' représentant $\sin^2(\alpha - \lambda)e^{-2f\alpha}$ et α la valeur initiale de θ, regardé ici comme positif de part et d'autre de Ox. Pour que le mobile puisse arriver au point le plus bas de la cycloïde, il faut que c' surpasse $\sin^2\lambda$, ce qui exige que α soit supérieur à un angle plus grand que 2λ. En admettant que cela ait lieu, la durée T du mouvement jusqu'au point O est donnée par la formule

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^\alpha \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{c' e^{2f\theta} - \sin^2(\theta - \lambda)}}.$$

En supposant $f = 0$, ce qui entraîne $\lambda = 0$, on tire de cette formule la valeur connue $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ indépendante de α, c'est-à-dire de la position initiale.

9. *La courbe fixe est une hélice tracée sur un cylindre de révolution dont l'axe est vertical; la force* P *est le poids du mobile.*

ε désignant le complément de l'angle sous lequel l'hélice coupe les génératrices du cylindre, et a le rayon, on a

$$T = \pm mg\sin\varepsilon, \quad N = mg\cos\varepsilon, \quad \rho = \frac{a}{\cos^2\varepsilon};$$

par conséquent [(7), n° 3]

$$R = \frac{m\cos\varepsilon}{a}\sqrt{\rho^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2},$$

car $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $d\frac{dz}{ds}$ sont nuls.

Deux cas se présentent : selon le sens de la vitesse initiale, le mobile s'élèvera ou descendra d'abord sur l'hélice; nous considérerons premièrement le second. Dans celui-ci, l'équation générale [(8), n° 5] donne, d'après les valeurs précédentes,

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\varepsilon - \frac{f\cos\varepsilon}{a}\sqrt{v^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2},$$

d'où l'on tire, en posant $ga \operatorname{tang}\varepsilon = b^2 f$,

$$(1) \qquad \frac{f\cos\varepsilon}{a}dt = \frac{dv}{b^2 - \sqrt{v^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2}}.$$

Remplaçant dt par $\frac{ds}{v}$ et posant

$$(2) \qquad \sqrt{v^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2} = v^2\cos\varepsilon + \xi,$$

d'où

$$(3) \qquad v^2\cos\varepsilon = \frac{g^2a^2 - \xi^2}{2\xi}, \quad \text{et} \quad v\,dv\cos\varepsilon = -\frac{g^2a^2 + \xi^2}{4\xi^2}d\xi,$$

il vient

$$(4) \qquad \frac{2f\cos^2\varepsilon}{a}ds - \frac{\xi^2 + g^2a^2}{\xi(\xi^2 - 2b^2\xi + g^2a^2)}d\xi = 0.$$

La nature de l'intégrale de cette équation dépend de celle des racines de

$$(5) \qquad \xi^2 - 2b^2\xi + g^2a^2 = 0,$$

savoir :

$$(6) \qquad \xi = b^2 \pm \sqrt{b^4 - g^2a^2} = ga\left(\frac{\operatorname{tang}\varepsilon}{f} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\varepsilon}{f^2} - 1}\right),$$

lesquelles sont réelles et inégales, égales entre elles ou imaginaires, selon qu'on a $\varepsilon > \lambda$, $\varepsilon = \lambda$ ou $\varepsilon < \lambda$, λ désignant toujours l'angle du frottement.

Soit $\varepsilon > \lambda$. Si l'on représente par α, β les deux racines de l'équation (5), la fraction rationnelle de l'équation (4) prend la forme

$$\frac{1}{\xi} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\xi-\alpha} - \frac{1}{\xi-\beta}\right),$$

et l'on a

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{b^2 f}{ga\sqrt{\tang^2\varepsilon - f^2}} = \frac{\tang\varepsilon}{\sqrt{\tang^2\varepsilon - \tang^2\lambda}}.$$

Posant encore

$$\sqrt{1 - \frac{\tang^2\lambda}{\tang^2\varepsilon}} = \mu \quad \text{et} \quad \frac{2\mu f\cos^2\varepsilon}{a} = k,$$

l'équation (4) revient à

$$k\,ds - \mu\frac{d\xi}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi-\alpha} + \frac{d\xi}{\xi-\beta} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$\xi^\mu\frac{\xi-\alpha}{\xi-\beta} = Ce^{ks}. \tag{7}$$

Soient v_0 la valeur initiale de v et ξ_0 la valeur correspondante de ξ. Comme la quantité auxiliaire ξ est nécessairement positive [formule (2)], on peut supposer, quel que soit l'exposant μ, que ξ^μ est positif; la constante C est ainsi de même signe que $\frac{\xi_0-\alpha}{\xi_0-\beta}$. ξ est évidemment inférieur à ga [formule (2)]; on a donc $\xi_0 < \alpha$, en supposant $\alpha > \beta$, car α surpasse ga [formule (6)]; mais ξ_0 peut se trouver entre α et β ou être inférieur à β. La substitution de ξ_0, c'est-à-dire de $\sqrt{v_0^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2} - v_0^2\cos\varepsilon$, à ξ dans le premier membre de l'équation (5), donne

$$v_0^4\cos^2\varepsilon + b^2v_0^2\cos\varepsilon + g^2a^2 - (v_0^2\cos\varepsilon + b^2)\sqrt{v_0^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2},$$

et la comparaison des carrés des deux parties de ce résultat fait voir qu'il est négatif ou positif, selon qu'on a

$$v_0^4\cos^2\varepsilon < \quad \text{ou} \quad > b^4 - g^2a^2.$$

Soit

$$\frac{\sqrt{b^4 - g^2 a^2}}{\cos\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \frac{ga}{\cos\varepsilon}\sqrt{\frac{\tang^2\varepsilon}{f^2} - 1} = v'^2;$$

si l'on a $v_0 < v'$, ξ_0 est donc entre α et β, tandis que ξ_0 est inférieur à β pour $v_0 > v'$.

En prenant la position initiale du mobile pour l'origine de l'arc s, la constante C est déterminée par la formule

$$\text{(8)} \qquad C = \xi_0 \frac{\xi_0 - \alpha}{\xi_0 - \beta},$$

qui, d'après la discussion précédente, donne une valeur négative ou positive, selon que v_0 est inférieur à v' ou supérieur. Dans le premier cas, d'après l'équation (7), la différence $\xi - \beta$ doit toujours être positive, en sorte que ξ décroît de ξ_0 à β; dans le second, au contraire, cette différence doit toujours être négative, en sorte que ξ va en augmentant de ξ_0 à β; mais, dans l'un comme dans l'autre, la limite β ne peut pas être atteinte, car elle entraîne $s = \infty$.

Si l'on attribue à ξ la valeur β dans la formule (3), on a, eu égard à l'équation (5),

$$v^2 \cos\varepsilon = \frac{g^2 a^2 - \beta^2}{2\beta} = \frac{g^2 a^2}{\beta} - b^2 = \sqrt{b^4 - g^2 a^2},$$

d'où

$$v^2 = \frac{ga}{\cos\varepsilon}\sqrt{\frac{\tang^2\varepsilon}{f^2} - 1} = v'^2.$$

Donc, en même temps que la variable auxiliaire ξ tend vers β, la vitesse v tend vers la valeur v', qu'elle ne peut cependant pas atteindre, et qui est une limite supérieure ou inférieure, selon qu'on a $v_0 < v'$ ou $v_0 > v'$.

Enfin, si l'on avait $v_0 = v'$, il s'ensuivrait $\xi_0 = \beta$. La vitesse serait constante, car il faudrait prendre $\frac{1}{C} = 0$, ce qui donne $\xi = \beta$ [équation (7)], d'où $v = v' = v_0$.

Soit $\varepsilon = \lambda$. On a $b^2 = ga$, par conséquent $\xi^2 - 2b^2\xi + g^2a^2 = (\xi - ga)^2$; d'autre part, l'auxiliaire ξ ne peut avoir [formule (2)] que des valeurs

comprises entre o et ga; le coefficient de $d\xi$ dans l'équation (4) est donc toujours positif. Comme il en est de même du premier terme de cette équation, la différentielle $d\xi$ ne peut avoir que des valeurs positives; par conséquent ξ ira toujours en augmentant. Il résulte de là, d'après la formule (3), que v décroît pendant tout le mouvement.

La fraction rationnelle de l'équation (4) revient à $\frac{1}{\xi} + \frac{2ga}{(\xi - ga)^2}$; l'intégrale générale de cette équation est donc

$$\frac{\sin 2\lambda}{a} s - l\frac{\xi}{C} + \frac{2ga}{\xi - ga} = 0 \quad \text{ou} \quad \xi e^{\frac{2ga}{ga-\xi}} = C e^{\frac{\sin 2\lambda}{a} s}.$$

En déterminant C d'après les conditions initiales, il est clair qu'on aurait pour cette constante une valeur positive finie; ξ ne pourra donc jamais atteindre à la valeur ga, car elle donnerait $s = \infty$. Par suite, la vitesse v ne pourra jamais devenir nulle.

Soit $\varepsilon < \lambda$. On a $b^2 < ga$ et, par conséquent, la quantité $\xi^2 - 2b^2\xi + g^2a^2$ est toujours positive; cela fait voir que la vitesse v diminue sans cesse, comme dans le cas précédent.

Le coefficient de $d\xi$, dans l'équation (4), revient à

$$\frac{1}{\xi} + \frac{2b^2}{(\xi - b^2)^2 + (g^2a^2 - b^4)};$$

l'intégrale générale de cette équation est donc

$$\frac{2f\cos^2\varepsilon}{a} s - l\frac{\xi}{C} - 2b^2 \operatorname{arctang} \frac{\xi - b^2}{\sqrt{g^2a^2 - b^4}} = 0.$$

La valeur de la constante C déduite des conditions initiales sera évidemment finie.

Ici $\xi = ga$ donne $v = 0$ et

$$s = \frac{a}{2f\cos^2\varepsilon}\left(l\frac{ga}{C} + 2b^2 \operatorname{arctang}\sqrt{\frac{ga - b^2}{ga + b^2}}\right);$$

cette valeur de s détermine la position où le mobile arrive sans vitesse et reste en équilibre.

Si la vitesse initiale est dirigée de manière que le mobile remonte d'abord sur l'hélice, il suffit de changer g en $-g$, par conséquent b^2 en $-b^2$, en prenant toujours $ga \operatorname{tang} \varepsilon = b^2, \ldots$, pour avoir les équations qui conviennent à ce mouvement. D'après l'équation (1), ainsi modifiée, dv est négatif et, par suite, v décroît, quelle que soit la relation entre les angles ε et λ; cela résulte d'ailleurs, *a priori*, de ce que la composante tangentielle du poids du mobile et le frottement sont tous deux de sens contraire au mouvement. Le mobile doit nécessairement arriver avec une vitesse nulle dans une certaine position. Quand on a $\varepsilon > \lambda$, cette position sera déterminée par l'équation (7) en prenant $\xi = ga$, et pour la constante C la valeur résultant de la formule (8) (les racines α et β sont négatives dans ce cas); le mobile, parvenu à la position dont il s'agit, descendra ensuite, et tout ce qui précède s'appliquera en supposant $v_0 = 0$. Si l'on a $\varepsilon \lesseqgtr \lambda$, c'est une des deux autres équations intégrales en s et ξ qu'il faut employer pour avoir la position où la vitesse devient nulle; le mobile y reste en équilibre.

Sur la fonction cinq fois transitive de 24 quantités;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Dans mon Mémoire *sur les fonctions de plusieurs quantités* publié dans le tome VI de ce Journal, en 1861, j'ai déclaré (p. 274) que je possédais une fonction cinq fois transitive de 24 quantités, dont j'ai donné en même temps le nombre des valeurs distinctes.

Si j'avais indiqué deux substitutions qui la laissent invariable et qui la caractérisent complétement, il eût été facile de vérifier son existence; mais, au contraire, la seule indication du nombre de ses valeurs distinctes ne jette aucune lumière sur la formation de cette fonction. Aussi aucun géomètre n'a-t-il essayé, depuis cette époque, de la déterminer, et je me propose maintenant de prouver qu'elle existe effectivement et de montrer, de plus, comment je suis parvenu à la découvrir.

Si je n'ai point publié cette fonction dans le Mémoire cité, c'est que la méthode que je devais employer pour la faire connaître n'avait ni la netteté, ni l'élégance de mes autres résultats. Cependant cette méthode ne paraîtra pas sans intérêt à ceux qui se représenteront qu'il eût été bien difficile de découvrir autrement la fonction qui va nous occuper.

Indication du procédé de la recherche.

1. Désignons par p un nombre premier et représentons p quantités par $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, en convenant que, si m et n sont deux entiers, on a $x_m = x_n$ toutes les fois que m est congru à n suivant le module p. Il existe des fonctions transitives de ces quantités qui sont invariables

seulement par des substitutions de la forme

$$(x_z,\ x_{az+b});$$

comme ces fonctions transitives sont évidentes, ainsi que la fonction symétrique et celle qui a deux valeurs, il sera entendu, quand nous parlerons, dans ce qui va suivre, de fonctions transitives de p lettres, qu'on laisse de côté ces fonctions connues.

Cela posé, soit une fonction transitive d'un nombre premier p de quantités, et supposons que $\frac{p-1}{2}$ soit aussi un nombre premier q; j'ai démontré dans le Mémoire cité (Chap. IV), que, en désignant les p quantités dans un ordre convenable par $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$, la fonction est invariable non-seulement par la substitution circulaire

$$\text{(A)} \qquad (x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{p-1}),$$

mais encore par la substitution

$$\text{(B)} \qquad (x_1,\ x_{g^2},\ x_{g^4}, \ldots, x_{g^{p-3}})(x_g,\ x_{g^3},\ x_{g^5}, \ldots, x_{g^{p-2}}),$$

g étant une racine primitive de p; par suite, elle est invariable par les $\frac{p(p-1)}{2}$ substitutions dérivées, comprises dans la formule

$$(z,\ a^2 z + b),$$

a et b étant quelconques.

Or voici le principe sur lequel je me suis appuyé pour déterminer la fonction dont il s'agit.

Représentons la substitution (B) *par*

$$\text{(C)} \qquad (x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{q-1})(x''_0, x''_1, x''_2, \ldots, x''_{q-1}),$$

et faisons

$$x'_0 = x_1, \quad x'_1 = x_{g^2}, \quad x'_2 = x_{g^4}, \ldots, \quad x'_{q-1} = x_{g^{p-3}};$$

alors, si le second cycle de (B) *est convenablement identifié avec le*

second cycle de (C), *la fonction transitive est nécessairement invariable par une substitution régulière de* $p-3$ *quantités de la forme*

$$(D) \qquad (x'_z, x'_{\gamma^u z})(x''_z, x''_{\gamma^u z}),$$

γ *étant une racine primitive de* q, u *un diviseur de* $q-1$, *plus petit que* $q-1$, *et les indices étant pris suivant le module* q.

Avant d'appliquer ce principe à la recherche d'une fonction transitive de 23 lettres, appliquons-le à la détermination des fonctions transitives de 7 et de 11 lettres, puisque $\frac{7-1}{2}$ et $\frac{11-1}{2}$ sont des nombres premiers.

Des fonctions transitives de 7 et de 11 lettres.

2. D'après ce que nous venons de rappeler, toute fonction transitive des 7 quantités $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_6$ peut être considérée comme invariable par les substitutions

$$(z, z+1) \quad \text{et} \quad (z, 3^2 z),$$

ou par les substitutions

$$(e) \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),$$

$$(f) \qquad (x_1, x_2, x_4)(x_3, x_6, x_5).$$

Mettons cette dernière substitution sous la forme

$$(g) \qquad (x'_0, x'_1, x'_2)(x''_0, x''_1, x''_2),$$

et nous aurons pour la substitution (D)

$$(h) \qquad (x'_1, x'_2)(x''_1, x''_2).$$

Pour identifier (f) et (g), on commencera par faire

$$x'_0 = x_1, \quad x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_4,$$

et l'on aura, par la considération des seconds cycles, les trois hypothèses suivantes :

1° $x''_0 = x_3, \quad x''_1 = x_6, \quad x''_2 = x_5;$

2° $x''_0 = x_6, \quad x''_1 = x_5, \quad x''_2 = x_3;$

3° $x''_0 = x_5, \quad x''_1 = x_3, \quad x''_2 = x_6.$

Et, d'après cela, la substitution (h) sera une des trois qui suivent :

1° $(x_2 x_4)(x_6 x_5),$

2° $(x_2 x_4)(x_5 x_3),$

3° $(x_2 x_4)(x_3 x_6).$

Une quelconque des substitutions 1°, 2°, 3°, combinée avec (e) et (f), donne un système de $4 \times 6 \times 7$ substitutions conjuguées, qui appartient à une fonction deux fois transitive qui a $\frac{2.3.4.5}{4} = 30$ valeurs. Ces trois systèmes de substitutions conjuguées ou les trois fonctions correspondantes ne diffèrent que par la manière de désigner les 7 quantités.

Considérons, par exemple, la première de ces trois fonctions. D'après les substitutions (f) et 1°, on voit immédiatement qu'elle est transitive par rapport aux 6 quantités $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$; puis, considérée comme fonction des 5 quantités $x_2, x_3, \ldots, x_6$, elle est non-seulement invariable par 1°, mais encore par

$$(x_2 x_6)(x_4 x_5);$$

la fonction est donc transitive par rapport à x_2, x_4, x_6, x_5, et elle a bien 30 valeurs.

D'après un théorème général, une fonction transitive étant nécessairement invariable par la substitution (f), il suffit, pour caractériser la fonction actuelle, de dire qu'elle est invariable par les substitutions (e) et 1°.

Désignons par x_∞ une huitième quantité; il existe une fonction des 8 lettres $x_0, x_1, \ldots, x_6, x_\infty$ qui, considérée comme fonction des 7 pre-

mières lettres, est identique à la fonction précédente, de sorte qu'elle est invariable par les substitutions (e) et 1°; elle est, de plus, invariable par toutes les substitutions

$$\left(z, \frac{Az+B}{Cz+D}\right),$$

pour lesquelles $AD - BC$ est résidu quadratique de 7; elle sera caractérisée par les substitutions (e) et 1°, et une quelconque de ces dernières substitutions renfermant x_∞, par exemple la suivante :

$$\left(x_z x_{-\frac{1}{z}}\right) = (x_0 x_\infty)(x_1 x_6)(x_2 x_3)(x_4 x_5).$$

Cette fonction trois fois transitive de 8 quantités est renfermée dans une famille de fonctions deux fois transitives de p^v quantités, qui deviennent trois fois transitives pour $p = 2$ et qui ont $\frac{1.2\ldots p^v}{p^v(p^v-1)\ldots(p^v-p^{v-1})}$ valeurs. J'ai donné cette famille de fonctions dans le Chapitre III du Mémoire cité, et j'y ai donné une méthode très-élégante pour les former. J'ai montré aussi que ces fonctions devaient être employées comme résolvantes des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier. (Voir *Mémoire sur la résolution des équations*, dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, t. IV, 1862.)

3. Appliquons la même méthode à la détermination des fonctions transitives de 11 lettres.

D'abord toute fonction transitive de 11 quantités peut être considérée comme invariable par les substitutions

$$(z, z+1), \quad (z, 2^2 z),$$

ou par les substitutions

$$(k) \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}),$$

$$(l) \qquad (x_1, x_4, x_5, x_9, x_3)(x_2, x_8, x_{10}, x_7, x_6).$$

Représentons la dernière substitution par

$$(m) \qquad (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)(x''_0, x''_1, x''_2, x''_3, x''_4);$$

identifions (m) avec (l) en commençant par poser

$$x'_0 = x_1, \quad x'_1 = x_4, \quad x'_2 = x_5, \quad x'_3 = x_9, \quad x'_4 = x_3,$$

et nous aurons à faire une des cinq suppositions suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
1^\circ & x''_0 = x_2, & x''_1 = x_8, & x''_2 = x_{10}, & x''_3 = x_7, & x''_4 = x_6; \\
2^\circ & x''_0 = x_8, & x''_1 = x_{10}, & x''_2 = x_7, & x''_3 = x_6, & x''_4 = x_2; \\
3^\circ & x''_0 = x_{10}, & x''_1 = x_7, & x''_2 = x_6, & x''_3 = x_2, & x''_4 = x_8; \\
4^\circ & x''_0 = x_7, & x''_1 = x_6, & x''_2 = x_2, & x''_3 = x_8, & x''_4 = x_{10}; \\
5^\circ & x''_0 = x_6, & x''_1 = x_2, & x''_2 = x_8, & x''_3 = x_{10}, & x''_4 = x_7.
\end{array}$$

La substitution

$$(\mathrm{D}) \qquad (x'_z x'_{\gamma^u z})(x''_z x''_{\gamma^u z}),$$

dont les indices sont pris suivant le module 5, sera, en prenant $\gamma = 2$, suivant qu'on fera $u = 2$ ou $u = 1$,

$$(n) \qquad (x'_1\, x'_4)(x'_2\, x'_3)(x''_1\, x''_4)(x''_2\, x''_3),$$

ou

$$(p) \qquad (x'_1\, x'_2\, x'_4\, x'_3)(x''_1\, x''_2\, x''_4\, x''_3).$$

La substitution (n) est la deuxième puissance de la substitution (p). Donc le système de substitutions conjuguées déduit de (k) et (p) renferme évidemment le système de substitutions conjuguées déduit de (k) et (n); donc, si le système déduit de (k) et (p) donne une fonction transitive de 11 lettres, on est assuré que l'autre système en donne une aussi, tandis que la réciproque n'est pas évidente.

Commençons donc par nous occuper du système de substitutions conjuguées déduit de (k) et (n). D'après les cinq suppositions possibles, (n) est une des cinq substitutions suivantes :

$$\begin{array}{ll}
1^\circ & (x_4\, x_3)(x_5\, x_9)(x_8\, x_6)(x_{10}\, x_7), \\
2^\circ & (x_4\, x_3)(x_5\, x_9)(x_{10}\, x_2)(x_7\, x_6), \\
3^\circ & (x_4\, x_3)(x_5\, x_9)(x_7\, x_8)(x_6\, x_2), \\
4^\circ & (x_4\, x_3)(x_5\, x_9)(x_6\, x_{10})(x_2\, x_8), \\
5^\circ & (x_4\, x_3)(x_5\, x_9)(x_2\, x_7)(x_8\, x_{10}).
\end{array}$$

Les substitutions 1°, 3°, 5° ne conviennent pas, c'est-à-dire que le système de substitutions conjuguées dérivées de (k) et d'une de ces trois substitutions n'est autre chose que les $\frac{1.2.3\ldots11}{2}$ substitutions qui laissent invariable la fonction des 11 lettres qui a deux valeurs seulement. Il faut montrer comment on pourra le reconnaître.

Cela est très-aisé si l'on veut bien se servir de ce principe, qui m'a servi bien des fois dans mes recherches, mais non dans mes démonstrations : c'est qu'une fonction transitive d'un nombre premier p de quantités ne peut être invariable par une substitution s'effectuant sur moins de $\frac{p+1}{2}$ quantités [*].

Considérons, par exemple, le système déduit de (k) et de 1°. Faisons 1° une fois, puis (k) deux fois, et formons le tableau

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ 0, & 1, & 2, & 4, & 3, & 9, & 8, & 10, & 6, & 5, & 7, \\ 2, & 3, & 4, & 6, & 5, & 0, & 10, & 1, & 8, & 7, & 9, \end{array}$$

nous aurons fait, en définitive, la substitution

$$(0, 2, 4, 5)(1, 3, 6, 10, 9, 7),$$

qui fait partie du système de substitutions conjuguées; faisons cette dernière substitution six fois, nous aurons la substitution

$$(q) \qquad (0, 4)(2, 5),$$

qui fait aussi partie de ce système, et qui n'a que quatre lettres;

---

[*] Dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 31 mai 1858, j'ai démontré le théorème suivant, qui pourrait également servir au but que l'on se propose ici : *Si une fonction transitive de n lettres est transitive par rapport à un certain nombre α de ses lettres qui n'est pas plus grand que $\frac{n}{2}$, ces n lettres peuvent se diviser en groupes composés chacun d'un même nombre de lettres, de manière que la fonction est transitive par rapport à ces groupes, qui sont transitifs.*

Mais, quoique je n'aie jamais douté de l'exactitude de ce théorème, la démonstration ne m'ayant pas pleinement satisfait, je ne l'ai jamais publié.

donc, d'après le principe ci-dessus, la substitution 1° doit être rejetée.

Si l'on ne veut pas employer ce principe, voici comment on pourra constater qu'il n'existe pas de fonctions transitives invariables par (k) et 1°. On déduira de ces deux substitutions quelques autres qui ne renferment pas une même lettre, x_0 par exemple. Le plus souvent, on pourra se contenter de deux substitutions qui ne renferment pas x_0; on constatera que la fonction est transitive par rapport aux lettres restantes $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Des substitutions obtenues sur ces 10 quantités, déduisons-en quelques autres ne renfermant pas x_1, et constatons que la fonction, d'après ces dernières substitutions, est transitive par rapport aux 9 lettres $x_2, x_3, \ldots, x_{10}$. Déterminons ensuite des substitutions dérivées ne contenant pas x_2, et ainsi de suite. En continuant ainsi, on prouverait que la fonction est transitive par rapport à 10 lettres, puis à 9 prises parmi les précédentes, puis à 8 prises parmi ces dernières, puis à 7, enfin à 6 lettres.

Or une fonction de n lettres ne peut être plus de $\frac{n}{2}$ fois transitive lorsqu'elle a plus de deux valeurs (*voir* notre Mémoire *sur le nombre de valeurs que peut acquérir une fonction*, t. V de ce Journal, 1860, p. 18); donc la fonction considérée ne saurait avoir plus de deux valeurs.

Cette méthode est très-longue, mais elle peut se simplifier beaucoup. En effet, dans le cas actuel par exemple, la fonction est invariable par la substitution (q). Donc, aussitôt qu'on aura reconnu que la fonction est quatre fois transitive, on en pourra conclure qu'elle est transitive par rapport à 4 lettres quelconques, et qu'elle n'a que deux valeurs, puisqu'à la place des 4 lettres de la substitution (q) on peut amener dans la fonction 4 lettres quelconques.

On reconnaîtra ainsi que la substitution 1° doit être rejetée, et il en est de même pour les substitutions 3° et 5°. Reste à considérer les deux substitutions 2° et 4° qui conviennent.

La fonction caractérisée par (k) et 2° est deux fois transitive, et, considérée comme fonction des 9 quantités $x_2, x_3, \ldots, x_{10}$, elle est invariable seulement par les substitutions dérivées de

$$(r) \qquad (2, 4, 7)(3, 10, 6)(5, 8, 9)$$

et de la substitution 2° ou de

$$(4, 3)(5, 9)(10, 2)(7, 6);$$

les substitutions dérivées de ces deux dernières sont la puissance deuxième de (r) et ces deux autres

$$(7, 10)(8, 5)(6, 4)(2, 3),$$
$$(2, 6)(9, 8)(3, 7)(4, 10).$$

Donc, en permutant les 9 quantités $x_2, x_3, \ldots, x_{10}$, on obtient 6 valeurs égales de la fonction, et cette fonction, qui est deux fois transitive, a $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{6} = 60480$ valeurs. Elle a été donnée pour la première fois par M. Kronecker.

La fonction transitive caractérisée par (k) et 4° est deux fois transitive, et, considérée comme fonction des 9 lettres $x_2, x_3, \ldots, x_{10}$, elle est invariable par la substitution

$$(7, 4, 3)(2, 6, 9)(8, 5, 10),$$

la substitution 4° et celles qui en sont dérivées. Il est facile de voir que cette fonction ne diffère de la précédente que par la manière de désigner les 11 quantités qu'elle renferme.

Ainsi, de l'examen de la substitution (u), il résulte qu'*il existe une fonction deux fois transitive de onze lettres qui a* 60480 *valeurs et caractérisée par les substitutions*

$$(E) \qquad (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{10}),$$

$$(H) \qquad (x_4, x_3)(x_5, x_9)(x_{10}, x_2)(x_7, x_6).$$

En y ajoutant une quelconque des substitutions

$$\left(z, \frac{Az + B}{Cz + D}\right),$$

pour lesquelles AD — BC *est résidu quadratique de* 11 *et renfermant* x_∞, *par exemple*

$$\left(z, -\frac{1}{z}\right) = (0, \infty)(1, 10)(2, 5)(3, 7)(4, 8)(6, 9),$$

on aura les trois substitutions qui caractérisent une fonction trois fois transitive des douze quantités x_∞, x_0, $x_1, \ldots, x_{10}$, qui, considérée comme fonction des onze dernières quantités, est identique à la fonction deux fois transitive qui précède.

4. Passons maintenant à l'examen de la substitution (p). Les première, troisième et cinquième identifications ayant dû être rejetées dans l'examen de la substitution (n), elles doivent l'être à plus forte raison maintenant; il n'y a lieu, par conséquent, d'essayer que la deuxième et la quatrième identification, ce qui donne, pour la substitution (p), l'une de ces deux formules

$$(s) \qquad (x_4, x_5, x_3, x_9)(x_{10}, x_7, x_2, x_0),$$

$$(t) \qquad (x_4, x_5, x_3, x_9)(x_0, x_2, x_{10}, x_8).$$

Il existe une fonction transitive de 11 lettres, caractérisée par (k) et par (s) ou par (k) et par (t). Comme les substitutions (k) et (s) donnent le même système de substitutions conjuguées que (k) et (t), considérons seulement le premier cas.

La fonction caractérisée par (k) et (s) est évidemment invariable par tout le système de substitutions conjuguées de la fonction de M. Kronecker; par conséquent, elle est invariable par la substitution (r), et, en l'ajoutant à (l) et (s), on a les trois substitutions

$$(\mathrm{L}) \qquad (x_1, x_4, x_5, x_9, x_3)(x_2, x_8, x_{10}, x_7, x_6),$$

$$(\mathrm{R}) \qquad (x_2, x_4, x_7)(x_3, x_{10}, x_6)(x_5, x_8, x_9),$$

$$(\mathrm{S}) \qquad (x_4, x_5, x_3, x_9)(x_{10}, x_7, x_2, x_6).$$

On peut reconnaître que le système de substitutions conjuguées dérivées de ces trois substitutions, qui s'effectuent sur les 10 quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, est trois fois transitif et renferme 8.9.10 substitutions (c'est une question sur laquelle nous allons d'ailleurs revenir). Et il en résulte une fonction quatre fois transitive de 11 lettres qui a 1.2.3.4.5.6.7 valeurs.

Ainsi, de l'examen de la substitution (p), il résulte qu'*il y a une*

fonction quatre fois transitive de onze lettres, qui a $1.2.3.4.5.6.7 = 5040$ *valeurs, caractérisée par les substitutions*

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{10}),$$
$$(x_4, x_5, x_3, x_9)(x_{10}, x_7, x_2, x_6),$$

et dont le système de substitutions conjuguées renferme le système de substitutions de la fonction deux fois transitive caractérisée par les substitutions (E) *et* (H). *Si à ces deux substitutions on ajoute la substitution* $\left(z, -\frac{1}{z}\right)$, *on a les trois substitutions qui caractérisent une fonction cinq fois transitive de douze quantités.*

J'ai présenté la découverte de cette fonction cinq fois transitive d'une manière toute différente à la fin du Chapitre II de mon Mémoire *sur les fonctions de plusieurs quantités*. Il est utile de comparer la forme sous laquelle elle se présente ici à celle sous laquelle nous l'avons d'abord fait connaître.

Désignons par ω une racine d'une congruence irréductible du second degré prise par rapport au module 3, par exemple une racine de la congruence

$$\omega^2 + 2\omega + 2 \equiv 0 \pmod{3};$$

toutes les racines de

$$x^{3^2} \equiv x \pmod{3}$$

sont égales à

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \omega, \quad 1+\omega, \quad 2+\omega, \quad 2\omega, \quad 1+2\omega, \quad 2+2\omega;$$

la quantité choisie pour ω est, de plus, une racine primitive de la congruence

$$x^{3^2-1} \equiv 1 \pmod{3};$$

et nous distinguerons les 8 racines de cette congruence en deux catégories : la première, qui renferme les puissances impaires de ω,

$$\omega, \quad \omega^3 \equiv 1 + 2\omega, \quad \omega^5 \equiv 1 + 2\omega, \quad \omega^7 \equiv 2 + \omega,$$

et que nous appelons des *non-résidus quadratiques;* la seconde, qui renferme les puissances paires de ω,

$$\omega^2 \equiv 1 + \omega, \quad \omega^4 \equiv 2, \quad \omega^6 \equiv 2 + 2\omega, \quad \omega^8 \equiv 1,$$

que nous appelons des *résidus quadratiques.*

D'après cela, changeons de notations et désignons les dix quantités

$$x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6, \quad x_7, \quad x_9, \quad x_{10}, \quad x_8, \quad x_1$$

respectivement par

$$y_\omega, \quad y_{1+\omega}, \quad y_{2+2\omega}, \quad y_{1+2\omega}, \quad y_2, \quad y_1, \quad y_{2+\omega}, \quad y_{2\omega}, \quad y_0, \quad y_\infty,$$

alors les trois substitutions (L), (R), (S) deviennent

$$(y_\infty, y_{2+2\omega}, y_{1+2\omega}, y_{2+\omega}, y_{1+\omega})(y_\omega, y_0, y_{2\omega}, y_1, y_2),$$
$$(y_\omega, y_{2+2\omega}, y_1)(y_{1+\omega}, y_{2\omega}, y_2)(y_{1+2\omega}, y_0, y_{2+\omega}),$$
$$(y_{2+2\omega}, y_{1+2\omega}, y_{1+\omega}, y_{2+\omega})(y_{2\omega}, y_1, y_\omega, y_2),$$

et peuvent se mettre sous cette forme

$$\left(z, \frac{z + 2\omega}{(1 + \omega)z + 1}\right),$$
$$(z, z + 2 + \omega),$$
$$(z, \omega z^3);$$

on en conclut facilement que toutes les substitutions de 8, de 9 et de 10 des quantités représentées par la notation y sont comprises dans les deux formules

$$\left(y_z, y_{\frac{Az+B}{Cz+D}}\right), \quad \left(y_z, y_{\frac{A_1 z^3 + B_1}{C_1 z^3 + D_1}}\right),$$

où $AD - BC$ est résidu quadratique et $A_1 D_1 - B_1 C_1$ non-résidu, et ces deux formules représentent un système de $8.9.10$ substitutions conjuguées, trois fois transitif.

Nous nous sommes appuyés sur ce théorème que toute fonction

transitive de onze quantités est invariable par la substitution (l) ou

$$(z,\ 2^2 z);$$

mais ce théorème ne prouve pas qu'une telle fonction ne puisse être invariable par la substitution $(z,\ 2z)$ ou

$$(u) \qquad (x_1\, x_2\, x_4\, x_8\, x_5\, x_{10}\, x_9\, x_7\, x_3\, x_6),$$

dont la précédente est une puissance deuxième. Pour reconnaître si une telle fonction peut exister, on combinera cette substitution avec les deux substitutions (E) et (H), qui caractérisent la fonction deux fois transitive de 11 lettres, et l'on verra que le système de substitutions conjuguées qui s'en déduirait ne serait autre que les $1.2.3\ldots 11$ substitutions qui laissent invariable la fonction symétrique. Il en résulte qu'il n'y a pas de fonctions transitives de 11 lettres invariables par la substitution (u), ou plus généralement par aucune substitution paire. (Nous appelons *substitution paire* celle qui change la fonction qui a deux valeurs.)

Fonctions transitives de 23 *quantités.*

5. Le nombre $\frac{23-1}{2}$ étant un nombre premier 11, nous pouvons appliquer la même méthode à la détermination des fonctions transitives de 23 quantités.

D'après ce que nous savons, toute fonction transitive de 23 quantités $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{22}$ peut être considérée comme invariable par les substitutions

$$(z,\ z+1) \quad \text{et} \quad (z,\ 5^2 z),$$

puisque 5 est racine primitive de 23, ou par les substitutions

$$(\mathrm{A}) \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{22}),$$

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} (x_1, x_2,\ x_4,\ x_8,\ x_{16}, x_9,\ x_{18}, x_{13}, x_3,\ x_6, x_{12}), \\ (x_5, x_{10}, x_{20}, x_{17}, x_{11}, x_{22}, x_{21}, x_{19}, x_{15}, x_7, x_{14}). \end{cases}$$

Mettons cette dernière substitution sous cette forme

$$(C)\qquad \begin{cases} (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6, x'_7, x'_8, x'_9, x'_{10}), \\ (x''_0, x''_1, x''_2, x''_3, x''_4, x''_5, x''_6, x''_7, x''_8, x''_9, x''_{10}), \end{cases}$$

et regardons $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{10}$ comme égales aux quantités de même rang du premier cycle de (B), en sorte que nous avons

$$x'_0 = x_1,\quad x'_1 = x_2,\quad x'_2 = x_4,\quad x'_3 = x_8,\quad x'_4 = x_{16},\quad x'_5 = x_9,$$
$$x'_6 = x_{18},\quad x'_7 = x_{13},\quad x'_8 = x_3,\quad x'_9 = x_6,\quad x'_{10} = x_{12};$$

mais l'identification du second cycle de (C) avec le second cycle de (B) peut se faire de onze manières différentes :

$$1^\circ \begin{cases} x''_0 = x_5,\quad x''_1 = x_{10},\quad x''_2 = x_{20},\quad x''_3 = x_{17},\quad x''_4 = x_{11},\quad x''_5 = x_{22}, \\ x''_6 = x_{21},\quad x''_7 = x_{19},\quad x''_8 = x_{15},\quad x''_9 = x_7,\quad x''_{10} = x_{14}; \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} x''_0 = x_{10},\quad x''_1 = x_{20},\quad x''_2 = x_{17},\quad x''_3 = x_{11},\quad x''_4 = x_{22},\quad x''_5 = x_{21}, \\ x''_6 = x_{19},\quad x''_{17} = x_{15},\quad x''_8 = x_7,\quad x''_9 = x_{14},\quad x''_{10} = x_5, \end{cases}$$

. . . . . .

Pour la substitution (D) du n° 1, nous devons prendre ou la substitution

$$(T)\qquad \begin{cases} (x'_1, x'_2, x'_4, x'_8, x'_5, x'_{10}, x'_9, x'_7, x'_3, x'_6), \\ (x''_1, x''_2, x''_4, x''_8, x''_5, x''_{10}, x''_9, x''_7, x''_3, x''_6), \end{cases}$$

composée de deux cycles de 10 quantités, ou sa puissance cinquième, ou sa puissance deuxième. Sa puissance cinquième est

$$(x'_1 x'_{10})(x'_2 x'_9)(x'_3 x'_8)(x'_4 x'_7)(x'_5 x'_6),$$
$$(x''_1 x''_{10})(x''_2 x''_9)(x''_3 x''_8)(x''_4 x''_7)(x''_5 x''_6),$$

et, après y avoir appliqué une des 11 identifications, on pourra vérifier qu'elle doit être rejetée. A plus forte raison, la substitution (T) doit être mise de côté.

Il reste donc à considérer la puissance deuxième de (T), qui est

$$(x'_1\, x'_4\, x'_5\, x'_9\, x'_3)(x'_2\, x'_8\, x'_{10}\, x'_7\, x'_6),$$
$$(x''_1\, x''_4\, x''_5\, x''_9\, x''_3)(x''_2\, x''_8\, x''_{10}\, x''_7\, x''_6).$$

Si l'on y applique la première identification, on obtient pour cette substitution

$$(\mathrm{U})\qquad \begin{cases} (x_2,\ x_{10}, x_9,\ x_6, x_8\ )(x_4,\ x_3,\ x_{12}, x_{13}, x_{18}), \\ (x_{10}, x_{11}, x_{22}, x_7, x_{17})(x_{20}, x_{15}, x_{14}, x_{19}, x_{21}), \end{cases}$$

qui fournit une fonction que nous allons examiner. Quant aux 10 autres identifications, elles ne donneraient pas d'autres fonctions. On cherchera des substitutions dérivées de (A) et (U) qui ne contiennent pas x_0, et par leur moyen on reconnaîtra que la fonction est transitive par rapport aux 22 quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{22}$; on formera ensuite des substitutions qui, outre x_0, ne contiennent pas x_1; on verra que la fonction est transitive par rapport aux 21 quantités x_2, $x_3, \ldots, x_{22}$; puis on formera des substitutions qui ne contiennent aucune des trois quantités x_0, x_1, x_5 qui n'entrent pas dans (U), et l'on trouvera que la fonction est transitive par rapport aux 20 quantités restantes. La fonction est donc quatre fois transitive.

Enfin donnons les substitutions qui ne contiennent pas x_0, x_1, x_5, et une quatrième quantité, x_2 par exemple. Elles sont les dérivées :

1° Des substitutions

$$(\mathrm{Z})\qquad \begin{cases} (4,19)(15,12)(16,7\ )(10,8\ )(18,9\ )(6,13)(11,20)(21,22), \\ (4,16)(19,7\ )(15,10)(12,8\ )(18,11)(9,20)(\ 6,21)(13,22), \\ (4,18)(19,9\ )(15,6\ )(12,13)(16,11)(7,20)(10,21)(\ 8,22), \\ (4,12)(19,15)(16,8\ )(\ 7,10)(18,13)(9,6\ )(11,22)(20,21), \end{cases}$$

d'après lesquelles, comme on le voit du premier coup d'œil, la fonction est transitive par rapport aux 16 quantités qui ont pour indices : 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22;

2° De la substitution

$$(3,14,17)(7,19,21)(13,15,12)(4,10,11)(9,8,16)(20,18,22).$$

On en peut conclure que le nombre des substitutions qui ne contiennent pas x_0, x_1, x_5, x_2 et qui laissent la fonction invariable est 16×3. Donc la fonction quatre fois transitive de 23 quantités a $\frac{1.2.3\,4\ldots19}{16 \times 3}$ valeurs.

Nous allons maintenant faire une remarque bien curieuse : c'est que, si l'on représente la substitution (U) cycle par cycle par

$$(V)\qquad \left\{\begin{array}{l}(y_0 y_1 y_2 y_3 y_4)(y'_0 y'_1 y'_2 y'_3 y'_4),\\ (y''_0 y''_1 y''_2 y''_3 y''_4)(y'''_0 y'''_1 y'''_2 y'''_3 y'''_4),\end{array}\right.$$

la fonction est invariable par la substitution $(y_z y_{4z})$, les indices étant pris suivant le module 5, c'est-à-dire par

$$(P)\qquad \left\{\begin{array}{l}(y_1 y_4)(y_2 y_3)(y'_1 y'_4)(y'_2 y'_3),\\ (y''_1 y''_4)(y''_2 y''_3)(y'''_1 y'''_4)(y'''_2 y'''_3),\end{array}\right.$$

pourvu que l'on identifie convenablement (U) et (V).

Les 20 lettres de la substitution (U) se composent des 16 lettres des substitutions (Z) et, en outre, de x_2, x_3, x_{17}, x_{14}, qui se trouvent dans quatre cycles différents de (U). Donc, pour que (P) puisse coïncider avec une des substitutions (Z) ou une de leurs dérivées, qui leur sont toutes semblables, nous ferons

$$y_0 = x_2,\quad y'_0 = x_3,\quad y''_0 = x_{17},\quad y'''_0 = x_{14},$$

en identifiant (U) et (V), et il en résultera

$$\begin{array}{llll} y_1 = x_{16}, & y_2 = x_9, & y_3 = x_6, & y_4 = x_8;\\ y'_1 = x_{12}, & y'_2 = x_{13}, & y'_3 = x_{18}, & y'_4 = x_4;\\ y''_1 = x_{10}, & y''_2 = x_{11}, & y''_3 = x_{22}, & y''_4 = x_7;\\ y'''_1 = x_{19}, & y'''_2 = x_{21}, & y'''_3 = x_{20}, & y'''_{15} = x_{15}. \end{array}$$

On en conclut, pour la substitution (P),

$$(H)\qquad \left\{\begin{array}{l}(x_{16} x_8)(x_9\ \ x_6)(x_{12} x_4)(x_{13} x_{18}),\\ (x_{10} x_7)(x_{11} x_{22})(x_{19} x_{15})(x_{21} x_{20}),\end{array}\right.$$

qui représente précisément la quatrième des substitutions (Z).

Si l'on reprend la notation des x' et x'', cette substitution pourra s'écrire

$$(\mathrm{K})\qquad \begin{cases} (x'_4\,x'_3)\,(x'_5\,x'_9)\,(x'_{10}\,x'_2)\,(x'_7\,x'_6) \\ (x''_1\,x''_9)\,(x''_4\,x''_5)\,(x''_7\,x''_8)\,(x''_6\,x''_2). \end{cases}$$

Or le premier cycle de (B) ou de (C) et la première ligne de (K) sont les deux substitutions

$$(\mathrm{L})\qquad (x'_0\,x'_1\,x'_2\ldots x'_{10}),$$

$$(\mathrm{M})\qquad (x'_4\,x'_3)\,(x'_5\,x'_9)\,(x'_{10}\,x'_2)\,(x'_7\,x'_6),$$

qui caractérisent une fonction deux fois transitive de 11 quantités qui a $6\times 10\times 11$ valeurs égales (*voir* n° 3). Le second cycle de (C) et la seconde ligne de (K) donnent les deux substitutions

$$(\mathrm{L}')\qquad (x''_0\,x''_1\,x''_2\ldots\ldots x''_{10}),$$

$$(\mathrm{M}')\qquad (x''_1\,x''_9)\,(x''_4\,x''_5)\,(x''_7\,x''_8)\,(x''_6\,x''_2),$$

qui caractérisent aussi une fonction deux fois transitive de 11 quantités.

Donc *la fonction quatre fois transitive de* 23 *quantités reste invariable si l'on fait sur les* 11 *quantités du premier cycle de* (B) *les* $6\times 10\times 11$ *substitutions dérivées de* (L) *et* (M) *qui caractérisent une fonction deux fois transitive de ces* 11 *quantités, pourvu qu'en même temps on fasse sur les quantités du second cycle de* (B) *des substitutions semblables dérivées de la même manière de* (L′) *et* (M′), *qui caractérisent aussi une fonction deux fois transitive.*

Il existe une fonction cinq fois transitive de 24 *quantités, qui, considérée comme fonction des* 23 *premières* $x_0, x_1, \ldots, x_{22}$, *est identique à la fonction que nous venons d'obtenir.* Désignons la vingt-quatrième lettre par x_∞; cette fonction est invariable par les substitutions

$$\left(z,\ \frac{\mathrm{A}z+\mathrm{B}}{\mathrm{C}z+\mathrm{D}}\right),$$

pour lesquelles AD — BC est résidu quadratique; par conséquent, elle est caractérisée par deux substitutions qui caractérisent la fonction

précédente de 23 quantités et par une quelconque des dernières substitutions renfermant x_∞, par exemple par $\left(z, -\frac{1}{z}\right)$ ou

$$(0, \infty)(1, 22)(2, 11)(3, 15)(4, 17)(5, 9)$$
$$(6, 19)(7, 13)(8, 20)(10, 16)(12, 21)(18, 14).$$

D'après ce que nous avons vu, toute fonction transitive de 23 quantités peut être considérée comme invariable par la substitution (A) et la substitution (U); mais il faut encore se demander si, outre la fonction que nous venons d'obtenir, il n'y en a pas une, invariable non-seulement par $(z, 5^2 z)$, mais aussi par la substitution circulaire de 22 lettres $(z, 5z)$. Toutefois on reconnaîtra facilement qu'une telle fonction n'existe pas.

Maintenant que nous savons qu'il n'existe qu'une seule fonction transitive de 23 quantités, il est évident que cette fonction est caractérisée par la substitution (A) et par une quelconque des substitutions qui la laissent invariable, pourvu que cette dernière soit prise en dehors des $\frac{23 \times 22}{2}$ substitutions qui sont de la forme

$$(z, az + b),$$

a étant résidu quadratique de 23; et, si l'on remarque que les substitutions de cette fonction qui ont le moins de lettres sont celles qui en ont 16, on voit que toutes les dérivées d'une substitution circulaire de 23 lettres et d'une substitution de moins de 16 lettres prises parmi ces dernières forment les $1.2.3\ldots23$ substitutions possibles, ou la moitié seulement, suivant que la seconde substitution est paire ou impaire.

Forme de la substitution qui caractérise toutes les fonctions transitives précédentes.

Recherchons sous quelle forme on peut écrire la substitution (D) du n° **1**, qui est

$$\text{(D)} \qquad (x'_z, x'_{mz})(x''_z, x''_{mz}),$$

en posant

$$\gamma^{\mu} \equiv m, \quad \left(\text{mod. } \frac{p-1}{2}\right),$$

lorsqu'on y rétablit les x sans accents : $x_1, x_2, \ldots$.

La première partie

(L). $$(x'_z, x'_{mz})$$

de la substitution (D) s'effectue sur les quantités $x'_0, x'_1, x'_2, \ldots$, ou

$$x_{g^0}, \quad x_{g^2}, \quad x_{g^4}, \ldots, \quad x_{g^{p-3}},$$

dont les indices sont des résidus quadratiques suivant le module p; elle revient à cette substitution sur les exposants des puissances paires de g

$$(2t, 2mt), \quad (\text{mod. } p-1);$$

ainsi g^{2t} est changé en g^{2mt}; donc, en désignant par a un résidu quadratique quelconque par rapport à p, la substitution (L) peut s'écrire

$$(a, a^m).$$

Considérons la seconde partie

(M) $$(x''_z, x''_{mz})$$

de la substitution (D), elle s'effectue sur $x_g, x_{g^3}, x_{g^5}, \ldots$; une seule de ces quantités n'est pas déplacée, et nous la représenterons par x_{g^β}, β étant impair. Alors, en général, $g^{\beta+2t}$ sera changé en $g^{\beta+2mt}$. Si l'on représente les non-résidus de p par b et qu'on pose, suivant le module p,

$$g^{\beta+2t} \equiv b,$$

on aura

$$g^{\beta+2mt} \equiv g^{(1-m)\beta} b^m,$$

et la substitution (M) pourra s'écrire

$$(b, g^{(1-m)\beta} b^m).$$

Nous venons d'obtenir deux formules pour représenter la substitution (D), suivant qu'il s'agit d'indices qui sont résidus quadratiques

ou d'indices qui sont non-résidus; mais on peut la représenter par la seule formule

$$\left(z,\ \mathrm{A}z^{\frac{p-1}{2}+m} + \mathrm{B}z^m\right).$$

En effet, si a est un résidu de p, on a $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, et, en exprimant que la substitution change a en a^m, on obtient

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \equiv 1.$$

Si b est un non-résidu de p, on a $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, et, en se servant de la seconde partie de la substitution, on a

$$-\mathrm{A} + \mathrm{B} \equiv g^{(1-m)\beta}.$$

On en conclut

$$\mathrm{A} \equiv \frac{1 - g^{\beta(1-m)}}{2}, \quad \mathrm{B} \equiv \frac{1 + g^{\beta(1-m)}}{2}.$$

Les substitutions que nous avons désignées, dans le n° **2**, par 1°, 2°, 3° peuvent s'écrire respectivement

$$(z,\ -2z^5 + 3z^2) \pmod{7},$$
$$(z,\ z^5),$$
$$(z,\ -z^5 + 2z^2);$$

donc la fonction deux fois transitive de sept lettres est caractérisée par la substitution $(z,\ z+1)$ et une quelconque des trois substitutions précédentes.

Les substitutions que nous avons désignées, dans le n° **5**, par 2° et 4° peuvent s'écrire, suivant le module 11,

$$(z,\ 5z^9 - 4z^4),$$
$$(z,\ 3z^9 - 2z^4);$$

donc la fonction deux fois transitive de onze lettres est caractérisée par $(z,\ z+1)$ et une de ces deux substitutions.

On voit ensuite que la fonction quatre fois transitive de 11 lettres est déterminée par $(z, z+1)$ et une des deux substitutions

$$(z, -3z^7 + 4z^2),$$
$$(z, 2z^7 - z^2).$$

Enfin la fonction quatre fois transitive de 23 quantités est donnée par $(z, z+1)$ et par la substitution

$$(z, -3z^{15} + 4z^4).$$

Réflexions sur les fonctions transitives d'un nombre premier de quantités.

D'après les calculs précédents, il existe une fonction transitive de 7 quantités qui l'est deux fois, deux fonctions transitives de 11 quantités dont l'une l'est deux fois et l'autre quatre fois, enfin une seule fonction transitive de 23 quantités qui l'est quatre fois. Si nous désignons généralement par p le nombre des quantités renfermées dans ces fonctions, ces fonctions sont invariables par les substitutions de la forme

$$(g) \qquad (z, a^2 z + b),$$

et, ∞ étant l'indice d'une nouvelle quantité, elles donnent des fonctions de $p+1$ quantités qui sont transitives une fois de plus et invariables par les substitutions

$$\left(z, \frac{Az+B}{Cz+D}\right),$$

pour lesquelles AD — BC est résidu quadratique.

Entre 11 et 23 se trouvent les trois nombres premiers 13, 17, 19, et je devais me demander s'il existe des fonctions transitives de 13, 17 ou 19 lettres invariables par toutes les substitutions (g). Après avoir fait les calculs nécessaires, j'ai reconnu qu'il n'y en avait point. D'après les essais que j'ai faits, je suis, de plus, extrêmement porté à croire

qu'il n'existe pas de fonctions plusieurs fois transitives de 13 ni de 19 lettres. Quant aux fonctions transitives de 17 quantités, il en existe trois, et qui sont trois fois transitives, fournies par ce théorème que j'ai donné dans mon Mémoire *sur les fonctions de plusieurs quantités* (Chapitre II) : « Si τ est un diviseur de ν, il existe une fonction trois fois transitive de $p^\nu + 1$ quantités, qui a $\frac{1.2.3\ldots(p^\nu-2)\times\tau}{\nu}$ valeurs. On les obtient en faisant $p=2$, $\nu=4$ et τ successivement égal à 1, 2, 4. »

Ainsi les fonctions plusieurs fois transitives de 7, 11 et 23 quantités, et celles de 8, 12 et 24, qui ont été calculées dans le Mémoire actuel, sont bien dues à ce que les nombres premiers 7, 11 et 23 sont des doubles de nombres premiers augmentés d'une unité. D'ailleurs, comme il est aisé de le voir, une fonction transitive dont le nombre des lettres est à la fois un nombre premier et le double d'un nombre premier augmenté d'une unité est au moins deux fois transitive.

Addition au Mémoire sur la *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire, etc.* [*];

PAR M. J. BOUSSINESQ.

J'ai démontré la formule fondamentale (14) du Mémoire sur la *Théorie des ondes et des remous, etc.*, en admettant que les composantes horizontales u, v, ou $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, de la vitesse en un point quelconque du fluide, diffèrent peu des valeurs u_0, v_0, ou $\frac{d\varphi_0}{dx}$, $\frac{d\varphi_0}{dy}$, qu'elles ont au point du fond situé sur la même verticale. Il importe de remarquer qu'on pourrait établir la même formule sans faire cette hypothèse restrictive. En effet, la relation (13)

$$(a) \qquad \varphi = \varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z \Delta_2 \varphi . dz, \quad \text{où} \quad \Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2},$$

différentiée, d'une part, deux fois en x, d'autre part, deux fois en y, donne, si l'on ajoute les résultats,

$$(b) \qquad \Delta_2 \varphi = \Delta_2 \varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z \Delta_2 \Delta_2 \varphi . dz;$$

et l'on aurait de même successivement

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Delta_2 \Delta_2 \varphi = \Delta_2 \Delta_2 \varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z \Delta_2 \Delta_2 \Delta_2 \varphi . dz, \ldots, \\ &(\Delta_2)^n \varphi = (\Delta_2)^n \varphi_0 - \int_0^z dz \int_0^z (\Delta_2)^{n+1} \varphi . dz, \end{aligned} \right.$$

en désignant par $(\Delta_2)^n$ la répétition de n fois l'opération qu'indique Δ_2. Or la substitution à $\Delta_2 \varphi$ de sa valeur (b), puis à $\Delta_2 \Delta_2 \varphi$ de sa va-

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XVII (1872).

leur (c), etc., change finalement la relation (a) en celle-ci :

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - \frac{z^2}{1.2}\Delta_2\varphi_0 + \frac{z^4}{1.2.3.4}\Delta_2\Delta_2\varphi_0 - \cdots \\ &\pm \frac{z^{2n}}{1.2\ldots 2n}(\Delta_2)^n\varphi_0 \mp \left(\int_0^z dz\right)^{2n+2}(\Delta_2)^{n+1}\varphi. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier où les mouvements se font parallèlement au plan des zx et sont indépendants de la coordonnée transversale y, l'expression développée de $(\Delta_2)^{n+1}\varphi$ se réduit à $\frac{d^{2n+2}\varphi}{dx^{2n+2}} = \frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}}$, et doit rester finie à mesure que n grandit; car on ne voit pas que, dans les phénomènes ondulatoires en général, les variations de la composante horizontale u de la vitesse, suivant sa propre direction prise pour celle des x, soient assez rapides pour que les dérivées successives de cette composante aient des valeurs indéfiniment croissantes. Il en est sans doute de même quand le mouvement se fait autrement que par plans parallèles, et l'expression $(\Delta_2)^{n+1}\varphi$ ne doit pas tendre vers $\pm\infty$ à mesure que n grandit, excepté peut-être en quelques points exceptionnels. Or, si l'on appelle M la valeur absolue la plus grande, supposée ainsi finie, que reçoit cette expression aux divers points de la verticale considérée (x, y), il vient, en valeur absolue,

$$\left(\int_0^z dz\right)^{2n+2}(\Delta_2)^{n+1}\varphi < \mathrm{M}\left(\int_0^z dz\right)^{2n+2}, \quad \text{ou} \quad < \mathrm{M}\frac{z^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n+2)},$$

et le dernier terme de la relation (d) tend vers zéro à mesure que n grandit de plus en plus. On doit donc avoir, en général,

$$(e)\quad \varphi = \varphi_0 - \frac{z^2}{1.2}\Delta_2\varphi_0 + \frac{z^4}{1.2.3.4}\Delta_2\Delta_2\varphi_0 - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}\Delta_2\Delta_2\Delta_2\varphi_0 + \cdots,$$

et cette équation, qui n'est autre que celle (14) du Mémoire, peut être appliquée, non-seulement aux mouvements dans lesquels les composantes horizontales des vitesses sont peu variables de la surface au fond, mais plus généralement à tous les phénomènes ondulatoires des liquides. Il en est, par suite, de même des équations (19), qui en résultent pour le cas de mouvements parallèles au plan des zx et indépendants de la coordonnée transversale y.

Les ondes et les remous observés par Scott Russell et par M. Bazin

diffèrent des autres mouvements ondulatoires des liquides pesants, en ce qu'ils sont régis, à une première approximation, par la loi simple de Lagrange ($\omega = \sqrt{gH}$). Or, pour que les formules (19) du Mémoire conduisent à cette loi, il faut : 1° que la valeur de u_0 soit petite en comparaison de $\sqrt{gH}$; 2° que chacune des quantités u_0, $H\frac{du_0}{dx}$, $H^2\frac{d^2u_0}{dx^2}$,... puisse être, à commencer par la seconde, négligée à une première approximation vis-à-vis de la précédente. Cela revient à admettre que les dérivées successives en x de φ_0 sont d'ordres de petitesse de plus en plus élevés, et aussi, par suite, d'après la formule (18), ou (e), dans laquelle chaque terme du second membre sera négligeable par rapport au précédent, que $\frac{d\varphi}{dx}$ ou u est sensiblement égal à $\frac{d\varphi_0}{dx}$ ou à u_0.

Ainsi la classe intéressante de faits que j'ai étudiée dans le Mémoire sur la *Théorie des ondes et des remous, etc.*, peut être distinguée des autres espèces de mouvements ondulatoires des liquides pesants au moyen de *l'un quelconque* des trois caractères suivants :

1° *La vitesse de propagation des ondes y est régie, à une première approximation, par la loi simple de Lagrange;*

2° *La composante horizontale des vitesses y est sensiblement la même aux divers points d'une même normale au fond;*

3° *Les dérivées successives de cette composante suivant sa propre direction y sont d'autant plus petites que leur ordre est plus élevé.*

Ce troisième caractère, purement analytique en quelque sorte, est le plus important à considérer quand il s'agit de soumettre au calcul les diverses ondes dont il s'agit, parce qu'il permet d'utiliser, en la réduisant à ses deux ou à ses trois premiers termes, l'expression (e) de φ, qui serait beaucoup moins convergente et, par suite, d'un emploi difficile dans tous les autres cas. Le premier a été confirmé, comme on sait, par des expériences précises et très-variées de Scott Russell, de M. Bazin, et même, plus anciennement, de Bidone, qui avait déjà étudié la propagation du gonflement produit, dans un canal presque horizontal, à l'amont d'une vanne que l'on abaisse afin de suspendre l'écoulement. Quant au second caractère, bien qu'il n'ait pas été, à ma connaissance, l'objet de mesurages proprement dits, on peut inférer expérimentalement sa réalité : 1° des observations de M. Morin sur l'onde qui

accompagne fréquemment un canot dans un canal étroit et profond, et qui, continuant d'abord à se propager avec la vitesse primitive du canot, quand on arrête celui-ci, ne prend la vitesse indiquée par la loi de Lagrange qu'au bout d'un temps assez long pour que le mouvement se soit étendu, avec une notable intensité, jusqu'au fond du canal; 2° des expériences de M. de Caligny, qui a constaté, au moment du passage de toute onde solitaire, un mouvement progressif, très-sensible et sans retour, de petits corps sphériques déposés au fond de l'eau, et qui a d'ailleurs réussi aisément à produire des ondes pareilles dans un canal de 72 centimètres de largeur, en y promenant avec une petite vitesse un cylindre vertical de 4 à 5 centimètres de diamètre, *plongé jusqu'au fond,* tandis qu'un cylindre beaucoup plus gros, offrant au liquide une section incomparablement plus considérable, mais *mis en contact seulement avec les couches fluides superficielles,* ne donnait naissance qu'à quelques rides de la surface liquide [*].

---

[*] *Bulletin de la Société Philomathique de Paris* (séance du 25 mars 1843) au journal *l'Institut.* M. de Caligny a reproduit cette Note, intitulée *Expériences sur la formation de l'onde solitaire,* dans un Mémoire (*Expériences diverses sur les ondes en mer et dans les cannux, etc.*) inséré au *Journal de M. Liouville* (t. XI, 1866), et aussi, partiellement, dans un travail plus ancien (*Expériences sur une nouvelle espèce d'ondes à double mouvement oscillatoire et orbitaire*) qui fait partie du même Recueil (1re série, t. XIII, 1848). Ces Mémoires contiennent d'autres détails intéressants : par exemple la manière, reconnue par M. de Caligny dès 1842, de mesurer la vitesse de propagation d'une onde solitaire, dans un canal court fermé à ses deux extrémités par des parois normales à son axe, en la faisant réfléchir un certain nombre de fois sur ces parois; l'observation des orbites décrites par les molécules liquides dans les ondes périodiques, orbites qui sont elliptiques (infiniment aplaties sur le fond) dans les ondes *courantes* ou *houleuses,* et sensiblement rectilignes dans les ondes oscillant sur place ou *clapoteuses;* celle de la diminution qu'éprouve, dans un système d'ondes courantes, la longueur d'onde correspondant à une période de vibration déterminée, à mesure que la profondeur d'eau diminue, ce qui établit que la vitesse de propagation de ces ondes augmente avec la profondeur, conformément à une remarque de la *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Savants étrangers,* t. XX, 2e note du § IV); enfin l'observation des mouvements de transport du fluide qui se superposent parfois au mouvement vibratoire, mais à d'assez petites distances seulement des endroits où agissent les causes productrices des ondes, mouvements qui étaient progressifs, ou de même sens que les ondes, dans les régions supérieures du fluide, et rétrogrades, ou de sens inverse, sur le fond.

Les trajectoires des molécules fluides, qui sont à fort peu près des ellipses dans les ondes périodiques *courantes* et des droites diversement inclinées sur l'horizon dans les vagues oscillant sur place ou *clapoteuses*, se déterminent également par des lois approchées très-simples dans les ondes que régit la loi de Lagrange. Si, en effet, x', z' désignent les coordonnées, à l'époque t, de la molécule qui occupait à l'origine, ou pour $t = -\infty$, la position (x, z), les formules (24) donneront à fort peu près, en observant que les composantes u, w de la vitesse valent sensiblement u_0, $-z\frac{du^0}{dx}$, et, en remplaçant, afin d'abréger, $\sqrt{gH}$ par ω,

$$(f)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = u = \dfrac{\omega}{H} f(x' - \omega t), \quad \dfrac{dz'}{dt} = w = -\dfrac{\omega}{H} z' f'(x' - \omega t), \\ \text{d'où} \\ x' - x = \dfrac{\omega}{H}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x' - \omega t)\,dt, \quad \log\dfrac{z'}{z} = -\dfrac{\omega}{H}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f'(x' - \omega t)\,dt. \end{cases}$$

Posons, dans ces intégrales, $x' - \omega t = s$, et prenons s pour variable indépendante, en faisant par suite

$$dt = -\frac{ds}{\omega - \dfrac{dx'}{dt}} = \text{à fort peu près } \frac{-ds}{\omega}.$$

Il viendra aisément

$$(g)\quad \begin{cases} x' - x = \dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{x'-\omega t}^{\infty} f(s)\,ds = \dfrac{1}{H}\int_{x'}^{\infty} f(x - \omega t)\,dx = \dfrac{1}{H}\int_{x'}^{\infty} h\,dx, \\ \log\dfrac{z'}{z} = -\dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{x'-\omega t}^{\infty} f'(s)\,ds = \dfrac{1}{H} f(x' - \omega t) = \dfrac{h}{H}. \end{cases}$$

Or l'intégrale $\int h\,dx$, prise entre les limites x' et ∞, n'est autre chose que le volume σ d'intumescence, par unité de largeur du canal, qui a dépassé, à l'époque t, l'abscisse x' de la molécule liquide considérée, et, d'autre part, le logarithme de $\frac{z'}{z}$, égal au petit rapport $\frac{h}{H}$, peut être

remplacé par $\frac{z'-z}{z}$. Les relations (g) équivalent donc aux formules simples

$$(i) \qquad x'-x=\frac{\sigma}{\mathrm{H}}, \quad z'-z=\frac{z}{\mathrm{H}}h.$$

D'après celles-ci, *l'espace total parcouru dans le sens horizontal, jusqu'à un moment quelconque, par une molécule liquide, est égal au quotient du volume d'intumescence qui l'a dépassée à ce moment par la profondeur primitive, et l'élévation, à chaque instant, de la même molécule au-dessus de son niveau initial, s'obtient en multipliant la hauteur actuelle de l'intumescence, sur la section où cette molécule se trouve, par le rapport, à la profondeur primitive, de la hauteur initiale de la molécule au-dessus du fond du canal.*

L'équation de la surface libre peut être supposée donnée en h et σ, et alors celle des trajectoires des molécules s'en déduira par la substitution, à h et à σ, de leurs valeurs tirées de (i). Par exemple, si l'onde est solitaire, ou que l'on ait $h=\frac{3\sigma(\mathrm{Q}-\sigma)}{4\mathrm{H}^3}$ (*voir* form. 61), il viendra

$$(j) \qquad z'-z=\frac{3z}{4\mathrm{H}^2}(x'-x)\left[\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{H}}-(x'-x)\right].$$

Les trajectoires décrites lors du passage d'une onde solitaire sont par conséquent des arceaux paraboliques, symétriques par rapport à un axe vertical, et dont l'amplitude horizontale constante est le quotient $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{H}}$ *du volume total de l'intumescence par la profondeur primitive, tandis que leur hauteur, égale à celle de l'onde pour les molécules superficielles, se trouve réduite, pour les autres, proportionnellement à leur distance au fond. Le demi-paramètre des paraboles, distance du foyer de chaque arceau à sa directrice, est les* $\frac{2}{3}$ *de la profondeur primitive pour les molécules superficielles, et varie pour les autres en raison inverse de leur distance au fond* : il est indépendant de la hauteur de l'onde.

Détermination du point critique où est limitée la convergence de la série de Taylor;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE.

J'ai établi, dans un Mémoire qui a paru en 1861 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, que les points où peut être limitée la région de convergence de la série suivant laquelle se développe, d'après la formule de Taylor, une fonction y, explicite ou implicite, sont exclusivement ceux où la fonction ou ses dérivées, à partir d'un certain ordre, deviennent infinies, à l'exclusion, par conséquent, des points multiples qui ne remplissent pas cette condition. J'ai établi en même temps l'inexactitude de la règle, donnée par Cauchy et adoptée depuis, explicitement ou implicitement, par tous les géomètres qui ont écrit sur la matière, M. Lamarle, M. Bonnet, M. Tchebychef, M. Puiseux, MM. Briot et Bouquet, d'après laquelle le cercle de convergence passerait par le point critique le plus voisin du point origine. L'erreur que j'ai relevée alors tient à une confusion qui avait été maintenue jusque-là : il ne suffit pas, pour que la convergence de la série de Taylor soit limitée à une certaine valeur de x, que cette valeur soit critique, ou plutôt qu'il y corresponde une valeur critique de y : il faut surtout que y, variant d'une manière continue avec x à partir de sa valeur initiale, arrive à sa valeur critique en même temps que x, sans que x ait dépassé la limite en question.

C'est de ce principe que naît la question qui sera résolue dans ce Mémoire.

Cette question paraissait inabordable, et elle n'a été en effet abordée par personne, malgré l'intérêt qu'elle présente et quoiqu'elle se trouve posée depuis bien longtemps.

La simplicité de la solution que j'en donne s'explique par deux motifs : le premier, que la considération des conjuguées fournit une méthode simple de classification des solutions imaginaires d'une équation à deux variables, et que j'ai depuis longtemps donné des moyens simples et pratiques pour construire ces conjuguées, d'abord comme lieux des intersections idéales de droites réelles, parallèles entre elles, avec le lieu, ensuite au moyen de leurs tangentes, de leurs asymptotes et, au besoin, de leurs courbures; le second, que j'ai antérieurement (*Journal de Mathématiques*, 1861) résolu directement le problème de déterminer la marche continue du point (x, y), tandis que $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ suivrait un chemin continu $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

La construction préalable des conjuguées avait, dans la question qui va nous occuper, une importance comparable à celle qu'aurait la description topographique d'un pays où l'on voudrait établir une route; il y avait eu, au reste, interversion de rôles entre les deux questions de la convergence de la série de Taylor et de la marche continue du point (x, y). M. Puiseux avait fait dépendre la seconde de la première, et, au contraire, il serait impossible de savoir si y est parvenu à sa valeur critique, quand x est arrivé à celle qui la donne, si l'on ne pouvait pas suivre la marche du point (x, y).

Je ramènerai la question de la détermination du point critique où est véritablement limitée la région de convergence à celle de la détermination du point d'arrivée d'un point (x, y) se mouvant d'une manière continue, tandis que son abscisse $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ varierait suivant une certaine loi, toujours très-simple du reste; mais je ne traiterai pas ici la seconde question, que j'ai résolue il y a dix ans.

Je me borne à rappeler que j'ai discuté alors, dans toutes les hypothèses possibles, la marche du point (x, y) à travers les conjuguées des lieux

$$y^2 = 2px,$$

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2,$$

$$y^3 - a^2y + a^2x = 0,$$

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

et

$$y^4 + x^4 = a^4;$$

que ces discussions n'ont présenté aucune difficulté d'aucune sorte, et qu'elles étaient si bien appropriées à la solution de la question qui va être traitée ici d'une manière générale, que non-seulement j'étais arrivé pour ainsi dire sans méthode à la solution de cette question, relativement aux exemples ci-dessus et aux deux suivants

$$y^n = (1 + x)^m$$

et

$$y = \mathrm{L}(1 + x),$$

mais encore que j'ai pu, dans tous les cas, assigner le caractère distinctif de celle des valeurs de la fonction dont la série donnait le développement.

Je commencerai par la définition de quelques termes que j'emploie dans un sens nouveau, et de quelques autres que j'ai cru devoir introduire pour simplifier le langage.

On a jusqu'ici entendu par *point critique* le point représentatif d'une valeur de la variable x à laquelle correspondait une valeur infinie ou multiple de la fonction y : j'appelle *point critique* d'un lieu $f(x, y) = 0$ le point réel ou imaginaire qui a pour coordonnées la valeur de x à laquelle correspond une valeur critique de y et cette valeur critique de y, c'est-à-dire que, des m points du lieu $f(x, y) = 0$, de degré m, qui correspondent à une valeur critique de x, j'appelle seulement *critique* celui dont l'ordonnée est infinie ou dont l'ordonnée a ses dérivées infinies à partir d'un certain ordre; car ce sont les seuls points multiples d'une ligne qui puissent être considérés comme critiques.

Je désignerai souvent sous le nom de *point origine* le point correspondant au système des valeurs de x et de y à partir desquelles on veut développer y suivant la série de Taylor.

Si $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ et $\alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$ sont les coordonnées du point origine, et que $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$ soient celles du point critique où se trouve limitée la convergence de la série de Taylor, l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

ne peut fournir que les ordonnées des points du lieu $f(x, y) = 0$, dont les abscisses

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

satisfont à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2;$$

mais pour chaque valeur, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, de x, satisfaisant à cette condition, elle ne fournit qu'une seule des m valeurs de y correspondantes.

Les points correspondant aux solutions de l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \ldots$$

forment plaque sur le tableau. Cette plaque est une partie de la portion du plan recouverte par les points correspondant aux solutions de l'équation

$$f(x, y) = 0;$$

je la désigne sous le nom de *région de convergence* relative au point (x_0, y_0). C'est le segment du lieu $f(x, y) = 0$ qui représente le segment bien déterminé

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \ldots$$

de la fonction multiple y.

La région de convergence est comprise dans l'intérieur d'une courbe qui est *le périmètre ou la circonférence de la région de convergence;* cette courbe passe par un point critique $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$, qui en est la *limite,* et est caractérisée par l'équation

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2.$$

Il pourra m'arriver de désigner le point origine sous le nom de *centre de la région de convergence.*

Cela posé, j'examinerai successivement le cas où l'équation $f(x, y) = 0$ aurait tous ses coefficients réels et où tous les points critiques seraient réels; le cas où, les coefficients de l'équation restant réels, quelques points critiques seraient imaginaires; enfin le cas où les coefficients de l'équation $f(x, y) = 0$ seraient imaginaires. Je distinguerai aussi dans chaque cas les deux hypothèses où l'abscisse du point origine serait réelle ou imaginaire.

PREMIER CAS.

L'équation a tous ses coefficients réels, et tous les points critiques sont réels.

Dans ce cas, les points critiques sont exclusivement les points de contact des tangentes menées à la courbe réelle parallèlement à l'axe des y.

Supposons d'abord que le point origine ait son abscisse réelle. Ses coordonnées seront

$$x_0 = \alpha_0 \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1},$$

β'_0 pouvant être nul, et le point lui-même sera situé sur une branche de la courbe réelle ou sur une branche de la conjuguée $c = \infty$.

Dans ce cas, *le point critique où sera limitée la région de convergence ne saurait être que l'un des deux qui pourront terminer cette branche dans un sens et dans l'autre, et ce sera celui qui fournira le moindre rayon ou dont l'abscisse différera le moins de celle du point origine.*

En effet, soit (a_n, a'_n) un des points critiques non situés sur la branche à laquelle appartient le point (x_0, y_0). Admettre que la région de convergence pût être limitée à ce point serait admettre que la série pût donner l'ordonnée d'un point $x = a_n \pm h$, $y = a'_n \pm k$ de la courbe réelle, ou de la conjuguée à abscisses réelles passant en (a_n, a'_n), infiniment voisin de ce point (a_n, a'_n); mais il ne peut en être ainsi : car, si l'on faisait revenir x par valeurs réelles de $a_n \pm h$ à x_0, le point (x, y) pénétrerait de plus en plus dans la région de convergence; son or-

donnée serait donc à chaque instant représentée par la série; mais, d'un autre côté, ce point, en se déplaçant d'une manière continue, suivrait ou bien la branche de la courbe réelle, ou bien la branche de la conjuguée à abscisses réelles qui partent de (a_n, a'_n), et tomberait finalement au point de l'une ou l'autre de ces branches qui aurait pour abscisse $x = x_0$.

Si ce point n'était pas le point origine, c'est-à-dire si le point critique (a_n, a'_n) n'appartenait pas à la même branche de la courbe à abscisses réelles que le point origine, la série donnerait donc en même temps deux valeurs de y pour une même valeur de x, ce qui est impossible.

D'un autre côté, il est bien clair que, si le point (x_0, y_0) est compris, sur la branche à laquelle il appartient, entre deux points critiques, ce sera au plus voisin que s'arrêtera la convergence, puisque la série prendra déjà une valeur infinie en ce point.

Supposons, en second lieu, que le point origine ait ses deux coordonnées imaginaires.

Soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

les coordonnées de ce point, et

$$x = a_n, \quad y = a'_n$$

les coordonnées du point critique, encore inconnu, par lequel passera la circonférence de la région de convergence; le carré du rayon du cercle de convergence sera

$$(\alpha_0 - a_n)^2 + \beta_0^2;$$

or, si un point (x, y) part de

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

et se déplace d'une manière continue, tandis que son abscisse $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ variera de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à α_0, β passant ainsi de β_0 à o et α restant

constamment égal à α_0, ce point ne sortira pas un seul instant de la région de convergence; par conséquent, la série donnera à chaque instant son ordonnée, notamment lorsque son abscisse sera devenue α_0.

D'un autre côté, si un autre point (x, y) partait du point critique (a_n, a'_n), et que son abscisse variât par valeurs réelles de a_n à α_0, un des points dans lesquels il se décomposerait [*] pénétrerait de plus en plus dans la région de convergence, et son ordonnée serait aussi à chaque instant donnée par la valeur de la série.

Si donc ce point ne rejoignait pas l'autre, qui est parti de (x_0, y_0), au moment où leurs abscisses prendront la même valeur α_0, la série pourrait donner deux valeurs différentes de y pour une même valeur de x, ce qui est impossible.

Les deux points (x, y) devront donc se rejoindre.

Mais le second aura suivi l'une des branches de la courbe réelle, ou de la conjuguée $c = \infty$, qui se touchaient au point critique $(a_n a'_n)$; par conséquent ce point critique devra appartenir à la branche de la courbe à abscisses réelles sur laquelle viendra tomber le point qui partira de (x_0, y_0), et dont l'abscisse varierait de $\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}$ à α_0.

Les points critiques à considérer, relativement à l'origine (x_0, y_0), seront donc seulement ceux qui se trouveront sur cette branche.

Du reste, il est clair qu'il faudra prendre celui qui donnera le moindre rayon pour la région de convergence. Car 1° ce point pourra être atteint sans sortir de la région qu'il limitera; 2° la série y prendra une valeur infinie; 3° pour aller joindre l'autre point critique, il faudrait faire prendre au module de $(x - x_0)$ une valeur supérieure à celui d'une valeur de cette différence pour laquelle la série serait déjà infinie.

Ainsi, dans le cas qui vient d'être examiné, la marche à suivre consistera à *déterminer le point d'arrivée du point qui partirait du point origine, et dont l'abscisse varierait de manière que sa partie imaginaire tendît directement vers zéro, sa partie réelle restant constante; ensuite à prendre sur la branche de la courbe à abscisses réelles, où se trouvera le point d'arrivée du point (x, y), celui des points critiques*

[*] Ces points sont toujours en nombre égal au degré de multiplicité du critique.

dont l'abscisse différerait le moins de la partie réelle de l'abscisse du point origine.

DEUXIÈME CAS.

L'équation $f(x, y) = 0$ a tous ses coefficients réels ; mais quelques points critiques sont imaginaires.

Supposons d'abord que l'abscisse du point origine soit réelle.

Si la région de convergence devait être limitée à l'un des points critiques réels, on saurait, par la théorie précédente, auquel on aurait affaire ; mais il pourra arriver que la limite soit un des points critiques imaginaires.

Soient

$$x_0 = \alpha_0, \quad \text{et} \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1}$$

les coordonnées du point origine, β'_0 pouvant être nul, et

$$x = a_n + b_n \sqrt{-1}, \quad y = a'_n + b'_n \sqrt{-1}$$

les coordonnées du point critique imaginaire où serait limitée la région de convergence ; le rayon de cette région sera alors

$$(\alpha_0 - a_n)^2 + b_n^2;$$

si l'on fait partir du point $(a_n + b_n \sqrt{-1}, a'_n + b'_n \sqrt{-1})$ un point (x, y) assujetti à la condition de continuité, et que l'on fasse converger son abscisse vers a_n, en faisant tendre vers zéro la partie imaginaire de cette abscisse, un des points dans lesquels il se décomposera pénétrera de plus en plus dans l'intérieur de la région de convergence, puisque le module de la différence de son abscisse et de celle du point origine variera de

$$(\alpha_0 - a_n)^2 + b_n^2 \text{ à } (\alpha_0 - a_n)^2;$$

par conséquent l'ordonnée de ce point sera constamment donnée par la valeur de la série.

D'un autre côté, si l'on fait partir un autre point (x, y) du point ori-

gine et qu'on fasse tendre son abscisse vers a_n par valeurs réelles, ce point ne sortira pas un instant de la région de convergence; les deux points devront donc se confondre quand leurs abscisses auront pris la valeur commune a_n.

Mais le point qui sera parti du point origine aura suivi la branche de la courbe à abscisses réelles qui contient ce point origine.

Par conséquent le point parti du point critique

$$(a_n + b_n\sqrt{-1},\ a'_n + b'_n\sqrt{-1})$$

aura dû tomber sur cette branche.

Les points critiques imaginaires tels qu'aucun de ceux qui en seraient partis simultanément ne viendrait tomber sur la branche de la courbe $\beta = 0$, passant par le point origine, ne seront donc pas à considérer.

D'ailleurs cette branche se terminera dans les deux sens par deux points critiques (dont l'un pourra être à l'infini ou ne pas exister), et les points critiques imaginaires tels qu'aucun de ceux qui en seraient partis simultanément ne viendrait tomber entre ces deux extrémités ne seront pas davantage à considérer.

On prendra, parmi les points critiques restants, le plus proche du point origine, c'est-à-dire celui auquel correspondra le moindre rayon, et, s'il n'est resté aucun point critique imaginaire, on prendra l'extrémité la plus proche du point origine. La démonstration se ferait comme dans le cas précédent.

Le nombre des points critiques imaginaires peut être considérable, et il y aurait avantage à en écarter d'avance le plus grand nombre possible. On en supprimera un grand nombre en remarquant que, la région de convergence relative à une origine située sur une branche de la courbe $\beta = 0$ ne pouvant en aucun cas entamer ni l'une ni l'autre des branches de la même courbe qui comprennent la branche où se trouve le point origine, les points critiques à considérer seront seulement ceux qui seront compris entre ces deux branches.

Si le point origine avait son abscisse imaginaire, on la ramènerait aisément à être réelle, comme on le verra dans le paragraphe suivant. Je passe donc immédiatement au troisième cas.

TROISIÈME CAS.

L'équation $f(x, y) = 0$ a ses coefficients imaginaires.

Si l'on suppose d'abord que le point origine ait son abscisse réelle, on démontrera, comme dans le cas précédent, que les points critiques à considérer seront seulement ceux auxquels on parviendrait directement en partant des points situés sur la branche de la conjuguée $c = \infty$, où se trouve l'origine, qui auraient pour abscisses les parties réelles des abscisses de ces points critiques, et faisant varier β de zéro aux parties imaginaires de ces mêmes points critiques.

Celui des points critiques remplissant cette condition, dont l'abscisse retranchée de l'abscisse de l'origine donnera la différence de moindre module, sera la limite de la région de convergence. On le démontrerait comme précédemment.

Supposons maintenant que le point origine ait son abscisse imaginaire et soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1}.$$

Si l'on remplace, dans l'équation proposée

$$f(x, y) = 0,$$

x par $x + \beta_0 \sqrt{-1}$, le lieu, considéré dans son ensemble, ne changera pas; les points critiques seront les mêmes, leurs ordonnées seront les mêmes et leurs abscisses auront seulement diminué de $\beta_0 \sqrt{-1}$; les conjuguées auront bien changé, mais elles seront formées des points de l'ancien lieu, et il sera facile de les construire. D'un autre côté, le point origine sera devenu

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1};$$

mais la région de convergence sera restée la même par ces deux raisons que, aux points correspondants, les dérivées de y par rapport à x seront restées les mêmes, et que les valeurs de $x - x_0$, pour les points

correspondants, seront aussi restées les mêmes, x et x_0 ayant varié de la même quantité.

La question sera donc restée au fond la même ; mais, l'abscisse du point origine étant devenue réelle, on pourra appliquer la méthode qui convient à ce cas.

Si l'on voulait éviter la substitution de $x + \beta_0 \sqrt{-1}$ à x dans l'équation, substitution qui en effet pourra quelquefois compliquer beaucoup cette équation, on le pourra en considérant que la conjuguée $c = \infty$ du nouveau lieu ne serait autre chose que la courbe

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1}$$

de l'ancien, et que cette courbe

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1}$$

jouera par conséquent, dans la question, précisément le même rôle que la conjuguée $c = \infty$, dans le cas où l'abscisse du point origine était réelle.

On construira donc la branche de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1},$$

qui partirait du point origine, et pour savoir si l'un des points critiques du lieu,

$$x = a_n + b_n \sqrt{-1}, \quad y = a'_n + b'_n \sqrt{-1},$$

serait à considérer, on en fera partir un point (x, y) dont on fera varier l'abscisse de

$$a_n + b_n \sqrt{-1} \quad \text{à} \quad a_n + \beta_0 \sqrt{-1}.$$

Si l'un des points dans lesquels se décomposera ce point (x, y) vient tomber sur la branche en question de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1},$$

il faudra conserver le point critique correspondant.

On prendra toujours ensuite pour limite de la région de convergence celui des points critiques conservés auquel correspondra le moindre rayon.

On peut évidemment résumer dans un même énoncé général les règles relatives aux trois cas, que nous n'avons du reste distingués que parce qu'il y correspondra des difficultés pratiques bien différentes.

Soient $f(x, y) = 0$ l'équation qui définit la fonction y, que l'on veut développer, et

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1}$$

le système de valeurs de x et de y à partir duquel on veut développer y ; on déterminera le point d'arrêt par la règle suivante :

On construira les courbes formées des points (x, y) correspondant aux solutions de l'équation $f(x, y) = 0$ où x serait de la forme

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1},$$

la partie réelle de x variant ainsi seule.

Ces courbes partageront le plan en bandes, et les points critiques qui seront à considérer seront seulement ceux qui se trouveront contenus dans les deux bandes comprises entre la courbe sur laquelle se trouvera le point origine (x_0, y_0) et les deux courbes voisines, dans un sens et dans l'autre.

Soient

$$x = a_n + b_n \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y\, a'_n + b'_n \sqrt{-1}$$

les coordonnées d'un des points critiques remplissant cette condition, et p son degré de multiplicité : on fera varier x de $a_n + b_n \sqrt{-1}$ à $a_n + \beta_0 \sqrt{-1}$, et l'on suivra dans leur marche les p points qui partiront du point critique.

Si aucun de ces p points ne vient tomber sur la branche de la courbe caractérisée par l'équation

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1}$$

à laquelle appartient le point origine, le point critique en question ne sera pas à considérer.

On prendra, parmi les points critiques qui resteront, celui dont l'abscisse, retranchée de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$, donnera la différence de moindre module; la série sera convergente pour toute valeur de x telle que le module de $x - x_0$ se trouve moindre que le module trouvé, et divergente pour toute autre valeur.

Cette règle est assez compliquée, et sa mise en pratique exigera des opérations délicates qui deviendront même très-pénibles, pour peu que l'équation $f(x, y) = 0$ se complique; mais il ne peut subsister aucun espoir de les réduire, par la raison que la règle elle-même comprend toutes les conditions du problème et ne comprend qu'elles; il ne saurait donc être question que de faciliter cette mise en pratique par l'application d'une méthode convenable.

Je crois que celle que j'ai donnée en 1861 dans le *Journal de Mathématiques*, pour suivre la marche d'un point (x, y) assujetti à la continuité, sera adoptée de préférence; mais avant d'indiquer les simplifications qu'elle comportera, en raison des conditions particulières que présente la question actuelle, je ferai remarquer que l'on pourrait toujours, si l'on y tenait, se servir de celle qu'a indiquée M. Puiseux en 1851, dans un autre but.

En effet tout se réduit, en définitive, à savoir si un point (x, y) parti de

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

arrivera à un point critique désigné

$$x = a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad y = a'_n + b'_n\sqrt{-1},$$

lorsque x aura varié d'abord de $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ à $a_n + \beta_0\sqrt{-1}$ et ensuite de $a_n + \beta_0\sqrt{-1}$ à $a_n + b_n\sqrt{-1}$.

Or on trancherait effectivement la question d'une façon sûre en divisant le chemin formé des deux droites allant du point (α_0, β_0) au point (a_n, β_0) et de ce dernier au point (a_n, b_n), en parties telles que le module de la différence des valeurs de x correspondant à deux points de division consécutifs restât toujours inférieur au module de l'excès

de la valeur de x correspondant au premier de ces deux points sur l'abscisse du point critique le plus voisin, et se servant de la série pour calculer de proche en proche la valeur finale de y.

L'application de cette méthode serait au reste singulièrement facilitée par cette circonstance, que l'accroissement donné à x pour passer d'un point de division du chemin dont il s'agit au suivant serait toujours composé d'une seule partie, réelle ou imaginaire, ce qui éviterait la formation des puissances successives d'un même binôme, formation à laquelle il eût fallu se résoudre dans le cas général pour lequel M. Puiseux avait imaginé sa méthode.

Ainsi, en s'en tenant même à cette méthode, quelque imparfaite qu'elle soit, on n'en devrait pas moins regarder la question comme résolue, au moins théoriquement.

Mais il est bien facile de montrer d'autre façon que les recherches pratiques qu'exigera l'emploi de la règle énoncée ne comporteront jamais que des difficultés que l'on sait d'avance résoudre.

J'insisterai d'abord sur le procédé à employer pour rejeter à l'avance tous ceux des points critiques qui ne se trouveraient pas compris entre les deux branches de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1},$$

qui comprennent elles-mêmes celle où se trouve le point origine.

Les points critiques appartenant tous à l'enveloppe des conjuguées, il suffira, pour trancher la question, de savoir d'une part en quels points cette enveloppe est coupée par les m branches de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0 \sqrt{-1},$$

et de distinguer ensuite parmi ces points de rencontre celui qui appartiendra à celle des branches de cette courbe qui passerait par le point origine; car les points critiques qui n'appartiendraient pas aux deux segments de l'enveloppe limités à ce dernier point devraient être écartés.

Or, pour déterminer tous les points de rencontre en question, on

n'aura qu'à résoudre les équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0$$

$$\frac{\dfrac{df}{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}}}{\dfrac{df}{d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}}} = \text{réel},$$

$$\beta = \beta_0.$$

D'un autre côté, la construction d'une branche définie de la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

de celle, par exemple, qui passerait par le point origine, se fera pour ainsi dire à main levée, lorsqu'on aura tracé à l'avance, comme on doit le supposer, et comme il est toujours si facile de le faire, le tableau général des conjuguées du lieu; en effet, la valeur variable de β est la moitié de la projection sur l'axe des x de la corde réelle menée du point (x, y) dans la conjuguée à laquelle appartient ce point; de sorte que la courbe

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1}$$

n'est autre chose que le lieu des extrémités des cordes réelles des diverses conjuguées dont les projections sur l'axe des x sont égales à $2\beta_0$.

Ainsi il sera toujours relativement facile d'écarter à l'avance le plus grand nombre des points critiques.

Pour déterminer ensuite le point d'arrêt, parmi les points critiques qui resteront à considérer, on n'aura plus à faire varier que la partie imaginaire de x, et par conséquent la question se présentera dans des conditions bien plus simples que celles où je l'ai traitée en 1861, sur des exemples assez compliqués déjà pour montrer que la méthode était praticable.

Détermination du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor et des portions des différentes conjuguées comprises dans cette région, ou construction du tableau général des valeurs d'une fonction que peut fournir le développement de cette fonction suivant la série de Taylor;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

La fonction

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

essentiellement unique, déterminée et finie, tant que la série qui la constitue reste convergente, n'est, si l'on peut s'exprimer ainsi, qu'une portion de la fonction y, généralement multiple, définie par l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

qui a servi à calculer la valeur initiale y_0 et les coefficients différentiels des divers ordres

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \ldots;$$

le lieu représenté par l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

n'est, de même, qu'un segment du lieu total représenté par l'équation

$$f(x, y) = 0$$

La détermination précise de ce segment constitue évidemment une partie essentielle de la théorie de la série de Taylor.

Cette question ne présente pas de grandes difficultés, et j'aurais pu l'aborder depuis longtemps, au moins relativement aux exemples pour lesquels j'avais assigné, en 1861 et 1862, dans le *Journal de Mathématiques*, la condition exacte de convergence; mais ces recherches, ne pouvant alors être utilisées que relativement à quelques exemples isolés, eussent présenté peu d'intérêt.

Aujourd'hui, au contraire, que la condition de convergence de la série peut être déterminée d'une façon précise dans tous les cas, la question qui va nous occuper s'impose d'elle-même, et doit être traitée avec le soin qu'elle mérite.

J'ai dit que cette question est assez facile à résoudre : je ferai toutefois remarquer qu'elle n'était abordable qu'autant, d'abord, qu'on disposât d'un moyen convenable de classification des solutions imaginaires d'une équation à deux variables, ensuite qu'on eût une méthode directe pour déterminer la valeur finale que prendrait la fonction y, assujettie à la continuité, lorsque la variable x serait parvenue de sa valeur initiale à la valeur finale qu'on voulait lui faire prendre, en suivant une loi de progression donnée; car, quant à se servir de la série elle-même pour calculer de proche en proche les valeurs de y, comme l'avait proposé M. Puiseux, ce serait peu réalisable.

Mais j'ai donné, en 1860, dans le *Journal de Mathématiques*, la solution de cette dernière question, et la méthode dont je me suis servi permettra d'assigner, parmi les valeurs de y, fournies par l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

celle qui serait donnée séparément par la série supposée convergente. La question sera seulement plus simple que celle que j'envisageais alors, puisque, la valeur finale de y devant rester la même, quelles que soient les valeurs qu'ait prises x dans l'intervalle, il n'y aura pas à s'en occuper.

J'appelle *région de convergence* la portion du plan recouverte par l'ensemble des points fournis par l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \ldots.$$

Il s'agit de déterminer le périmètre de cette région et la portion de chaque conjuguée qui s'y trouve comprise.

Cette courbe passe par le point critique du lieu considéré où s'arrête la convergence de la série, et tous ses autres points ont pour abscisses les quantités qui, retranchées de la valeur initiale x_0 de x, fournissent des différences de même module que la différence entre x_0 et l'abscisse du point d'arrêt.

Ainsi, si

$$x_1 = a + b\sqrt{-1}, \quad y_1 = a' + b'\sqrt{-1}$$

est celui des points critiques où s'arrête la convergence, et que

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

soient les valeurs initiales de x et de y, le périmètre de la région de convergence sera caractérisé par l'équation

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2,$$

ou

$$(\alpha^2 - a^2) + (\beta^2 - b^2) - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$

α et β désignant les parties réelle et imaginaire variables de x.

La question est donc de suivre de proche en proche la marche de y lorsque $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ varie à partir de $x_1 = a + b\sqrt{-1}$, en suivant le chemin

$$(\alpha^2 - a^2) + (\beta^2 - b^2) - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0.$$

Les points du périmètre qui auront même caractéristique appartiendront à une même conjugnée et formeront les extrémités de l'arc de cette conjuguée compris dans l'intérieur de la région de convergence; de sorte que, si l'on a tracé d'avance ces conjuguées et qu'on relève pour chacune d'elles la portion comprise dans l'intérieur de la région de convergence, on aura le tableau de toutes les valeurs de la fonction y que pourra fournir la série.

Si l'équation $f(x, y) = 0$ est du degré m, elle fournira entre α, β,

α' et β' deux équations de degré m. En y joignant les trois équations

$$\alpha^2 - a^2 + \beta^2 - b^2 - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$
$$x = \alpha + \beta,$$
$$y = \alpha' + \beta',$$

et éliminant α, β, α' et β', on aurait l'équation du périmètre de la région de convergence, qui serait du degré $2m^2$.

Mais la courbe ainsi obtenue comprendrait une foule de branches parasites, puisqu'elle contiendrait les m points du lieu $f(x, y) = 0$ qui correspondraient à une même valeur de x satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 - a^2 + \beta^2 - b^2 - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$

tandis que la courbe cherchée n'en devrait comprendre qu'un.

D'ailleurs la méthode qu'on aurait suivie ne pourrait fournir aucune indication propre à permettre d'éliminer les branches parasites du lieu.

On ne recourra donc pas habituellement à cette méthode, qui ne donnerait qu'un résultat brut dont on ne saurait que faire.

Le principal moyen qu'on emploiera pour traiter la question se tirera de cette remarque, que la courbe cherchée ne saurait entamer ni l'une ni l'autre des deux branches de la courbe caractérisée par l'équation générale

$$x = \alpha + \beta_0\sqrt{-1},$$

qui comprendraient immédiatement celle où se trouve le point origine. Cette remarque fournira le moyen d'éliminer les solutions étrangères que le calcul aura fournies.

Nous commencerons par la construction de la tangente à la courbe en un quelconque de ses points, parce que cette question est la plus simple.

Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

les coordonnées d'un point du périmètre cherché, et

$$m + n\sqrt{-1}$$

la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$ en ce point; les coordonnées du point infiniment voisin du périmètre seront

$$x + d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$$

et

$$\begin{aligned} y &+ (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) \\ &= y + (md\alpha - nd\beta) + (nd\alpha + md\beta)\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

de sorte que le coefficient angulaire de la tangente cherchée sera

$$\frac{md\alpha - nd\beta + nd\alpha + md\beta}{d\alpha + d\beta}$$

ou

$$\frac{m + n + (m - n)\frac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}.$$

D'ailleurs $\frac{d\beta}{d\alpha}$ s'obtiendra en différentiant l'équation

$$(\alpha^2 - a^2) + (\beta^2 - b^2) - 2(\alpha - a)\alpha_0 - 2(\beta - b)\beta_0 = 0,$$

qui donnera

$$(\alpha - \alpha_0)d\alpha + (\beta - \beta_0)d\beta = 0,$$

d'où

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}.$$

Par suite, le coefficient angulaire cherché sera

$$\frac{(m + n)(\beta - \beta_0) - (m - n)(\alpha - \alpha_0)}{(\beta - \beta_0) + (\alpha - \alpha_0)}.$$

On déterminera tout aussi aisément le rayon de courbure de la même courbe en un quelconque de ses points.

Soit $p + q\sqrt{-1}$ la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ au point considéré, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, au point $(x + dx,\ y + dy)$ du périmètre, sera

$$m + n\sqrt{-1} + (p + q\sqrt{-1})\,dx$$

ou

$$m + n\sqrt{-1} + (p + q\sqrt{-1})\left(1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}\sqrt{-1}\right)d\alpha,$$

c'est-à-dire

$$m + p\,d\alpha + q\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha + \left(n + q\,d\alpha - p\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha\right)\sqrt{-1};$$

le coefficient angulaire de la tangente au périmètre en ce point $(x + dx,\ y + dy)$ sera donc

$$\frac{\left[m + n + (p + q)\,d\alpha - (p - q)\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha\right](\beta + d\beta - \beta_0)}{(\beta + d\beta - \beta_0) + (\alpha + d\alpha - \alpha_0)}$$
$$- \frac{\left[m - n + (p - q)\,d\alpha + (p + q)\frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}d\alpha\right](\alpha + d\alpha - \alpha_0)}{(\beta + d\beta - \beta_0) + (\alpha + d\alpha - \alpha_0)};$$

l'angle de contingence sera, en conséquence,

$$\frac{1}{\beta - \beta_0}\,\frac{(\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0)\{(p+q)[(\beta - \beta_0)^2 - (\alpha - \alpha_0)^2] - 2(p-q)(\beta - \beta_0)(\alpha - \alpha_0)\} - 2m[(\beta - \beta_0)^2 + (\alpha - \alpha_0)^2]}{(\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0)^2 + [(m + n)(\beta - \beta_0) - (m - n)(\alpha - \alpha_0)]^2}\,d\alpha;$$

quant à l'élément du périmètre, c'est

$$\sqrt{(d\alpha' + d\beta')^2 + (d\alpha + d\beta)^2},$$

ou

$$\sqrt{1 + \left[\frac{(m + n)(\beta - \beta_0) - (m - n)(\alpha - \alpha_0)}{\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0}\right]^2}\left(1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0}\right)d\alpha,$$

le rayon de courbure sera donc

$$\frac{-[(\beta - \beta_0) - (\alpha - \alpha_0)]\{(\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0)^2 + [(m + n)(\beta - \beta_0) - (m - n)(\alpha - \alpha_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{(\beta - \beta_0 + \alpha - \alpha_0)\{(p+q)[(\beta - \beta_0)^2 - (\alpha - \alpha_0)^2] - 2(p-q)(\beta - \beta_0)(\alpha - \alpha_0)\} - 2m[(\beta - \beta_0)^2 + (\alpha - \alpha_0)^2]}.$$

Voyons maintenant comment on obtiendra des points de la courbe en nombre suffisant pour la construire.

La question se réduit à trouver les points où elle coupe chaque conjuguée. Or soit C la caractéristique d'une conjuguée, de sorte que le long de cette conjuguée $\frac{\beta'}{\beta} = C$; les points cherchés seront fournis par les deux équations comprises dans

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta C\sqrt{-1}) = 0,$$

et par la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2;$$

ces trois équations donneront α, β et α', dont on formera les coordonnées des points cherchés; mais elles fourniront beaucoup de solutions étrangères, dont on se débarrassera comme il a été dit plus haut.

Pour ne pas multiplier inutilement les essais, on fera bien de commencer par déterminer les conjuguées tangentes au périmètre de la région de convergence; pour cela, on n'aura qu'à éliminer α et α' entre les équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta C\sqrt{-1}) = 0,$$
$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2,$$

et à exprimer que l'équation résultante en β a deux racines égales. A la vérité, l'équation propre à déterminer les valeurs extrêmes de C fournira aussi beaucoup de solutions étrangères; mais on s'en débarrassera par les moyens qu'on a déjà indiqués.

Le point important de la question est de fixer la figure du paramètre de la région de convergence aux environs du point d'arrêt.

Nous rappellerons d'abord que les points critiques appartiennent toujours à l'enveloppe totale des conjuguées. Ce sont les points de contact des tangentes à cette enveloppe parallèles à l'axe des y, le mot *tangente* étant pris ici dans son acception la plus générale, c'est-à-dire que ce sont les points situés à l'infini sur les branches de l'enveloppe qui ont leurs asymptotes parallèles à l'axe des y, les limites de ses diverses branches dans le sens des x, ses points de rebroussement, etc.,

les points multiples où les dérivées de y par rapport à x se séparent, sans devenir infinies, étant seuls exceptés.

L'examen complet de la question comporterait naturellement une infinité de cas, puisqu'il faudrait distinguer ceux où les degrés de multiplicité des points d'arrêt seraient différents, et, pour chaque valeur du degré de multiplicité, passer en revue toutes les hypothèses possibles.

Nous nous bornerons à l'examen des trois cas les plus simples et les plus usuels : celui où le point d'arrêt serait l'extrémité d'une branche de l'enveloppe asymptote à une parallèle à l'axe des y; celui où ce serait le point de contact avec l'enveloppe d'une tangente simple parallèle à l'axe des y; enfin celui où ce serait un point de rebroussement de l'enveloppe où $\frac{d^2y}{dx^2}$ serait infini.

Dans le premier cas, le périmètre de la région de convergence devant contenir le point d'arrêt sera naturellement asymptote à la même parallèle à l'axe des y que la branche de l'enveloppe qui irait passer par ce point.

Dans le second cas, le périmètre de la région de convergence sera tangent à l'enveloppe au point d'arrêt, puisque l'enveloppe est tangente à toutes les courbes continues qui ont un point commun avec elle; mais, au reste, on le vérifierait aisément sur la formule trouvée plus haut du coefficient angulaire de la tangente au périmètre

$$\frac{(m+n)(\beta-\beta_0)-(m-n)(\alpha-\alpha_0)}{(\beta-\beta_0)+(\alpha-\alpha_0)};$$

en effet, $\frac{dy}{dx}$ étant infini au point d'arrêt, m ou n seront infinis, et par conséquent le coefficient angulaire de la tangente au périmètre sera aussi infini.

Enfin, dans le troisième cas, la formule

$$\frac{[(\beta-\beta_0)-(\alpha-\alpha_0)]\{(\beta-\beta_0+\alpha-\alpha_0)^2+[(m+n)(\beta-\beta_0)-(m-n)(\alpha-\alpha_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{\{\beta-\beta_0+\alpha-\alpha_0\}\{(p+q)[(\beta-\beta_0)^2+(\alpha-\alpha_0)^2]-2(p-q)(\beta-\beta_0)(\alpha-\alpha_0)\}-2m[(\beta-\beta_0)^2+(\alpha-\alpha_0)^2]},$$

trouvée plus haut pour représenter le rayon de courbure du périmètre, donnera évidemment une valeur nulle pour ce rayon de courbure au point d'arrêt, puisque l'une au moins des quantités p et q sera infinie;

par conséquent, lorsque le point d'arrêt sera un point de rebroussement de l'enveloppe du lieu, ce sera aussi un point de rebroussement du périmètre de la région de convergence.

Nous placerons ici une autre remarque qui aidera puissamment à la construction du périmètre de la région de convergence, à partir du point d'arrêt; c'est qu'une courbe quelconque, caractérisée par une équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

qui passerait au point d'arrêt, où elle serait naturellement tangente à l'enveloppe, ne saurait, en aucun cas, pénétrer dans la région de convergence que par l'un seulement des deux arcs qui partiraient en sens contraire de ce point d'arrêt. En effet, l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

étant supposée admettre la solution $\alpha = a$, $\beta = b$, si l'on fait varier α et β à partir de a et de b, en désignant par $d\alpha$ et $d\beta$ les accroissements de α et de β, on aura

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{\varphi'_a(a, b)}{\varphi'_b(a, b)},$$

$d\alpha$ pouvant être positif ou négatif, mais $d\alpha$ et $d\beta$ devant changer en même temps de signes.

D'un autre côté, l'inégalité

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < (a - \alpha_0)^2 + (b - \beta_0)^2,$$

qui, pour rester satisfaite à partir de $\alpha = a$, $\beta = b$, exigerait que

$$(a - \alpha_0)\, d\alpha + (b - \beta_0)\, d\beta$$

restât négatif, sera bien remplie par l'un des systèmes de valeurs de $d\alpha$ et de $d\beta$, données par l'équation

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\varphi'_a(a, b)}{\varphi'_b(a, b)},$$

mais ne le sera pas par l'autre; par conséquent, la courbe caractérisée

par l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ ne pénétrera dans la région de convergence que par l'un de ses deux arcs partant en sens contraire du point d'arrêt.

Cette remarque, appliquée à l'enveloppe et à la conjuguée qui la touche au point d'arrêt, conduit à des résultats importants.

Il en résulte que la série qui, selon les cas, peut représenter les ordonnées d'arcs plus ou moins étendus, à partir du point d'arrêt, de l'enveloppe ou de la conjuguée qui passe en ce point, ne saurait en aucun cas fournir l'ordonnée d'un seul point du prolongement de l'un de ces arcs au delà du point d'arrêt; le point d'arrêt est toujours l'une des extrémités de l'arc de l'enveloppe ou de la conjuguée qui y passe, dont la série puisse fournir les ordonnées, en d'autres termes la série ne peut servir à passer de l'une à l'autre des deux branches de l'enveloppe que sépare le point d'arrêt, ou de la conjuguée qui y passe. On peut le vérifier directement de la manière suivante :

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point d'arrêt, $\frac{dy}{dx}$ y étant infini, $\frac{dx}{dy}$ y sera nul; l'abscisse x du lieu, développée à partir de $x = x_1$, sera donc représentée par

$$x = x_1 + \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_1 \frac{(y - y_1)^2}{1.2} + \ldots,$$

c'est-à-dire qu'à des valeurs de y équidistantes de y_1 il correspondra des valeurs égales de x.

Or si $(p + q\sqrt{-1})$ représente la valeur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ en un point

$$(x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1})$$

de l'enveloppe, la condition pour que le point mobile (xy) reste sur cette enveloppe est que la différentielle de $\frac{dx}{dy}$, ou

$$(p + q\sqrt{-1})\, dy,$$

soit réelle, c'est-à-dire que

$$p\, d\beta' + q\, d\alpha' = 0.$$

On obtiendra donc deux points de l'enveloppe, voisins du point (x_1, y_1), dans l'un et dans l'autre sens, en donnant à y les deux valeurs

$$y = y_1 \pm \left(1 - \frac{q}{p}\sqrt{-1}\right) d\alpha',$$

équidistantes de y_1.

Or ces deux ordonnées, équidistantes de y_1, correspondraient à une même abscisse. Si donc la série pouvait fournir les ordonnées des points d'un arc de l'enveloppe s'étendant de part et d'autre du point critique, elle pourrait, pour une même valeur de x, fournir deux valeurs différentes de y, ce qui est impossible.

Le théorème est donc établi en ce qui touche l'enveloppe.

Soit maintenant C la caractéristique du point critique (x_1, y_1), l'abscisse du lieu étant représentée par

$$x = x_1 + (p + q\sqrt{-1})\frac{(y - y_1)^2}{1.2} + \ldots,$$

les différentielles $d\alpha + d\beta\sqrt{-1}$ et $d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1}$ de x et de y à partir du point x_1, y_1 seront liées par la relation

$$d\alpha + d\beta\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})\frac{(d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1})^2}{1.2},$$

d'où

$$2d\beta = 2p\,d\alpha'\,d\beta' + q(d\alpha'^2 - d\beta'^2);$$

pour que le point mobile reste sur la conjuguée C, il faudra donc que

$$\frac{2d\beta'}{2p\,d\alpha'\,d\beta' + q(d\alpha'^2 - d\beta'^2)} = C$$

ou que

$$\frac{2}{C} = 2p\,d\alpha' + q\left(d\alpha'\frac{d\alpha'}{d\beta'} - d\beta'\right).$$

Cette condition exige que $\frac{d\alpha'}{d\beta'}$ soit infini : α' devra donc varier seul; par conséquent, en prenant pour y les deux valeurs

$$y = y_1 \pm d\alpha',$$

on obtiendra deux points de la conjuguée passant au point critique, infiniment voisins de ce point et placés de part et d'autre par rapport à lui.

Mais ces deux ordonnées, équidistantes de y_1, correspondraient à une même abscisse. Si donc la série pouvait fournir les ordonnées des points d'un arc de la conjuguée critique s'étendant de part et d'autre du point critique, elle pourrait, pour une même valeur de x, fournir deux valeurs différentes de y, ce qui est impossible.

On peut encore ajouter que, si l'on place le point origine sur l'enveloppe à une distance suffisamment petite de l'un des points critiques, la série ne pourra pas fournir l'ordonnée d'un seul point de la conjuguée passant en ce point critique.

En effet, la région de convergence s'étendant du point (x_0, y_0) au point critique (x_1, y_1) et pouvant fournir tous les points de l'arc de l'enveloppe limité à ces deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1), si l'on conçoit une conjuguée tangente à l'enveloppe en un point (x', y') compris entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1), comme la série ne sera pas encore divergente en (x', y'), elle pourra servir à passer sur cette conjuguée et à la parcourir dans un sens et dans l'autre jusqu'aux points (x, y) pour lesquels le module de la différence $x_0 - x$ serait égal à celui de $x_0 - x_1$.

Mais des deux arcs de la conjuguée allant du point (x', y') aux deux points (x, y) qui viennent d'être définis, l'un prolonge directement le chemin déjà parcouru sur l'enveloppe et se rapproche du point critique; et cet arc, le long duquel le module de la différence $x_0 - x$ ne peut qu'augmenter, sera d'autant moindre que le point $x' y'$ sera plus voisin du point (x_1, y_1), de sorte que les deux arcs $(x', y' - x_1, y_1)$, $(x', y' - x, y)$ s'évanouiront en même temps. L'arc de la conjuguée mobile que pourra représenter la série à partir du point où cette conjuguée touchera son enveloppe et dans le sens que nous considérons sera donc d'autant moindre que la conjuguée mobile se rapprochera davantage de la conjuguée critique et se réduira à zéro sur cette conjuguée elle-même.

Cela posé, il est facile de voir que le second arc de la conjuguée mobile que la série pourrait fournir dans le sens contraire s'évanouira en même temps que le premier. En effet, ici le point infiniment voisin du point critique sur le premier arc de la conjuguée mobile, au moment où elle vient se confondre avec la conjuguée qui passe au point

critique, n'échappe à la représentation par la série que parce que le module de la différence $x - x_0$ entre son abscisse et celle du point origine surpasse celui de la différence $x_1 - x_0$. Mais cette abscisse est aussi celle d'un point de l'autre arc; la série ne peut donc pas plus fournir l'un que l'autre de ces points.

De même, si l'on place le point origine sur la conjuguée passant en un point critique, à une distance suffisamment petite de ce point critique, la série ne pourra pas fournir l'ordonnée d'un seul point de l'arc de l'enveloppe passant par ce point.

En effet si le point origine (x_0, y_0) était sur l'une des conjuguées voisines de la conjuguée issue du point critique et tangente à l'enveloppe en un point (x', y'), la série pourrait représenter l'arc compris sur cette conjuguée entre le point (x_0, y_0) et le point (x', y'), plus un arc de l'enveloppe s'étendant dans les deux sens à partir du point (x', y'), et qui serait limité dans un sens au point critique x_1, y_1 et dans l'autre en un point (x, y) tel, que le module de la différence $x_0 - x$ fût égal à celui de la différence $x_0 - x_1$. Mais il est facile de voir que ce point (x, y) serait d'autant plus voisin de (x', y') que celui-ci le serait lui-même davantage de (x_1, y_1), et que les deux distances s'évanouiraient en même temps.

En effet l'arc $(x_1, y_1 - x, y)$ devrait changer de sens, sur l'enveloppe, si le point (x_0, y_0), après s'être rapproché de la conjuguée issue du point critique, passait sur une conjuguée placée de l'autre côté par rapport à celle où il se trouvait d'abord; or, avant de changer de sens, cet arc devrait s'évanouir.

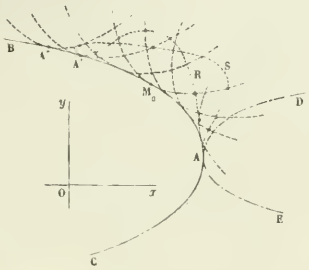
Lors donc que le point origine sera sur la conjuguée issue du point d'arrêt, la série ne pourra représenter l'ordonnée d'aucun point de l'enveloppe.

Il est clair du reste que cette dernière proposition ne fournira d'indications sûres qu'autant que le module de $x_1 - x$ croîtra constamment de zéro à la valeur du module de $x_1 - x_0$, lorsque x passera par les valeurs des abscisses des points intermédiaires de la conjuguée issue du point (x_1, y_1).

Les théorèmes qui précèdent permettent de se rendre compte de la forme que doit affecter dans chaque cas la limite de la région de convergence et de la manière dont cette limite change.

En premier lieu, lorsque le point origine M_0 est situé sur l'enveloppe BAC, la région de convergence coupe chaque conjuguée, qu'elle entame en deux points placés de part et d'autre du point où elle touche l'enveloppe, pourvu que ce point soit assez voisin de M_0. Ces deux points de rencontre tendent à se confondre sur la conjuguée infiniment voisine de la conjuguée DAE qui passe au point critique.

Fig. 1.



Sur la conjuguée qui touche l'enveloppe au point A′ tel que les modules des différences des abscisses des points M_0 et A d'une part, M_0 et A′ de l'autre soient égaux, l'un des arcs s'évanouit, mais l'autre subsiste encore un certain temps.

Si la conjuguée s'éloigne encore un peu, l'arc restant à ses deux extrémités d'un même côté du point de contact, il finit par s'évanouir lorsque la conjuguée devient tangente au périmètre de la région de convergence.

Cette courbe est tangente à l'enveloppe en A et en A′ : en A elle présente un point de rebroussement, elle est dessinée en points ronds, la conjuguée qui y est tangente touche l'enveloppe en A″; les points où le périmètre de la région de convergence coupe toutes les conjuguées sont marqués d'une manière distincte.

La région de convergence est formée des deux espaces clos séparément limités d'une part à l'arc AA′ de l'enveloppe, et de l'autre aux deux arcs ARA′ et ASA′ de son périmètre.

Si le point origine passait de l'enveloppe sur une conjuguée quel-

conque, telle que celle qui touche l'enveloppe en M_0 dans la figure précédente, le périmètre de la région de convergence changerait peu du côté de A'; mais cette courbe couperait alors la conjuguée passant en A près de ce point, de sorte qu'un petit arc de cette conjuguée pourrait être fourni par la série. Cet arc, au reste, resterait limité en A et s'étendrait vers D. La série pourrait encore fournir des arcs de plus en plus petits des conjuguées tangentes à l'enveloppe, de A en C, jusqu'à une certaine distance; ces arcs auraient leurs deux extrémités d'un même côté du point de contact avec l'enveloppe. D'ailleurs le rebroussement du périmètre, en A, disparaîtrait.

Si la conjuguée contenant le point origine se rapprochait de la conjuguée issue du point critique, le point de contact de cette conjuguée avec l'enveloppe se rapprochant du point A, l'arc AA' de cette enveloppe, que pourrait fournir la série, diminuerait, et l'arc de la conjuguée passant au point critique, compris dans la région de convergence augmenterait en même temps, tout en restant toujours limité en A. Le point de contact avec la branche AC de l'enveloppe de la dernière conjuguée rencontrée par la limite de la région de convergence reculerait en même temps vers C.

Enfin, si le point origine M_0 venait se placer sur la conjuguée pas-

Fig. 2.

sant au point critique, comme le point mobile xy ne pourrait pas passer sur l'enveloppe, les deux points de rencontre de la limite de la

région de convergence avec une conjuguée quelconque appartiendraient toujours à une même des deux branches séparées sur cette conjuguée par le point où elle toucherait l'enveloppe. Cette branche serait celle qui occuperait par rapport au point de contact la même position que le point M_0 par rapport au point A, ou celle qui serait en continuité avec M_0A.

Ces observations générales seront utilement complétées par cette remarque importante, dans la question dont il s'agit, que, si les conjuguées qui avoisinent celle où se trouve le point origine étaient construites avec assez de soin, on pourrait, jusqu'à un certain point, déterminer par tâtonnements les points où chacune d'elles serait coupée par le périmètre de la région de convergence; car la position d'un point d'une conjuguée dont la caractéristique est donnée déterminant les deux parties de l'abscisse de ce point, il n'y aurait, pour savoir si un point d'une conjuguée est ou non compris dans la région de convergence, qu'à déterminer le signe de la différence

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 - (a_1 - \alpha_0)^2 - (b_1 - \beta_0)^2.$$

Lorsque le point origine $x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$, $y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$ se déplace sur le lieu $f(x, y) = 0$, la région de convergence se déforme insensiblement en conservant pendant un certain temps pour limite le même point critique

$$a_n + b_n\sqrt{-1},$$
$$a'_n + b'_n\sqrt{-1};$$

mais, si le déplacement du point origine est assez considérable, la limite de la région de convergence doit finir par tomber en un autre point critique

$$a_p + b_p\sqrt{-1},$$
$$a'_p + b'_p\sqrt{-1}.$$

Au moment où le point d'arrêt va changer, il y a un instant où le périmètre de la région de convergence passe à la fois par le point $(a_n + b_n\sqrt{-1}, a'_n + b'_n\sqrt{-1})$, dont il va se séparer définitivement, et

par le point $(a_p + b_p\sqrt{-1},\ a'_p + b'_p\sqrt{-1})$, sur lequel il va rouler pendant un certain temps.

On peut appeler *courbe d'équilibre,* relativement aux deux points critiques

$$(a_n + b_n\sqrt{-1},\quad a'_n + b'_n\sqrt{-1})$$

et

$$(a_p + b_p\sqrt{-1},\quad a'_p + b'_p\sqrt{-1}),$$

le lieu des points du lieu $f(x, y) = 0$, tels que, s'ils étaient pris pour points origines, la région de convergence correspondante serait limitée à la fois aux deux points

$$(a_n + b_n\sqrt{-1},\quad a'_n + b'_n\sqrt{-1})$$

et

$$(a_p + b_p\sqrt{-1},\quad a'_p + b'_p\sqrt{-1});$$

l'équation caractéristique de cette courbe d'équilibre est

$$(\alpha - a_n)^2 + (\beta - b_n)^2 = (\alpha - a_p)^2 + (\beta - b_p)^2$$

ou

$$2\alpha(a_p - a_n) + 2\beta(b_p - b_n) = a_p^2 - a_n^2 + b_p^2 - b_n^2.$$

Cette équation est du premier degré; elle ne donnera donc qu'une valeur de β pour chaque valeur de α; mais, à chaque valeur de

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

il correspond m valeurs de y, en sorte que chaque courbe d'équilibre paraîtrait devoir se composer de m branches s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$; mais de ces m branches il n'y en aura évidemment qu'une qui répondra à la question, parce que, lorsque le point (x_0, y_0) aura dépassé dans un sens ou dans l'autre la courbe d'équilibre entre les deux points critiques considérés, la région de convergence cessera de passer par le point critique où elle était limitée d'abord, et que la question de sa limite se posera alors entre l'autre de ces deux points critiques et un troisième.

La considération des courbes d'équilibre peut être très-utile pour simplifier des recherches particulières; ces courbes présentent, en tout cas, un grand intérêt; mais il n'y aura lieu d'en faire une étude spéciale qu'à propos de chaque exemple.

Je me bornerai ici à faire remarquer que la courbe d'équilibre relative à deux points critiques imaginaires conjugués est toujours la courbe réelle; car, si $a_p + b_p\sqrt{-1} = a_n - b_n\sqrt{-1}$, l'équation de la courbe d'équilibre se réduit à $\beta = 0$. Or cette équation ne saurait s'appliquer à aucune branche de la conjuguée $C = \infty$; car, relativement à cette branche, elle signifierait que, si la région de convergence relative au point

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$$

était limitée au point critique

$$a_n + b_n\sqrt{-1}, \quad a'_n + b'_n\sqrt{-1},$$

celle qui se rapporterait au point

$$x_0 = \alpha_0 - \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 - \beta'_0\sqrt{-1}$$

serait limitée au point

$$a_n - b_n\sqrt{-1}, \quad a'_n - b'_n\sqrt{-1}.$$

On sait que les points critiques réels d'un lieu sont les points de contact avec la courbe réelle des tangentes qu'on peut lui mener parallèlement à l'axe des y, et que les points critiques imaginaires sont les points de contact des tangentes qu'on peut mener dans la même direction à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire au lieu des points du lieu pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est réel, parce qu'une valeur infinie de $\frac{dy}{dx}$ doit être considérée comme réelle, la tangente d'un angle imaginaire $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ ne pouvant devenir infinie que dans l'hypothèse $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et $\psi = 0$.

Quant aux autres points critiques, où les dérivées de y par rapport à x ne commencent à devenir infinies qu'à partir du second ordre, ou du troisième, etc., ils proviennent toujours de la réunion accidentelle de divers points critiques simples en un seul, et, par conséquent, n'appartiennent pas moins que les premiers à l'enveloppe.

Or, lorsque les coefficients de l'équation du lieu varient d'une manière continue tout en restant réels, la courbe réelle et l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées se déforment d'une manière continue. Il résulte de ces deux observations que, les coefficients de l'équation venant à varier d'une manière continue, les points critiques se déplaceront aussi d'une manière continue sur le plan, et que, par conséquent, si l'abscisse $x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ du point origine reste fixe, son ordonnée $y_0 = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1}$ restant, bien entendu, assujettie à satisfaire, concurremment avec x_0, à l'équation variable du lieu, ou encore si x_0 et y_0 varient ensemble d'une manière continue en même temps que les coefficients de l'équation du lieu, la région de convergence se déformera elle-même d'une manière continue.

Mais si, partant d'une équation à coefficients réels, représentant une courbe réelle, dont les conjuguées pourront avoir une seconde enveloppe imaginaire, on donne à ces coefficients, assujettis à la condition de continuité, des accroissements imaginaires, d'abord infiniment petits, l'enveloppe totale, alors complétement imaginaire, des conjuguées du nouveau lieu différera d'abord infiniment peu, comme position et comme forme, de l'enveloppe, en partie réelle, en partie imaginaire, de l'ancien lieu, et elle se déformera ensuite d'une manière continue.

En effet, lorsque les coefficients d'une équation varient d'une manière continue, les valeurs de la fonction y, qui correspondent à une valeur fixe de la variable x, varient aussi d'une manière continue, ainsi que les valeurs de la dérivée de cette fonction.

Par conséquent, si l'on donnait à x, dans la nouvelle équation, les mêmes valeurs réelles auxquelles correspondaient précédemment des valeurs réelles de y et de $\frac{dy}{dx}$, on en tirerait, pour la fonction et pour sa dérivée, des valeurs imaginaires, il est vrai, mais où les parties imaginaires seraient d'abord infiniment petites. Les points correspondants

seraient donc à la fois infiniment voisins de l'ancienne courbe réelle et de la nouvelle enveloppe.

Cette observation montre que, dans le cas encore où les coefficients de l'équation d'une courbe passeraient d'une manière continue de l'état réel à l'état imaginaire, la région de convergence se déformerait toujours d'une manière continue.

Il y a toutefois à cette règle générale une exception d'un genre particulier qu'il importe de signaler : si les coefficients de l'équation varient de façon que le lieu acquière un point multiple où les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ soient différentes, les points critiques qui viennent se confondre en ce point multiple disparaissent alors comme points critiques, de sorte que si, en raison de la position du point origine, la région de convergence était auparavant limitée à l'un d'eux, son périmètre doit alors changer brusquement.

Applications.

Considérons d'abord l'équation

$$xy = \frac{c^2}{4}.$$

Le lieu comporte deux points critiques situés à l'infini sur l'axe des y, dans les deux sens, mais qui correspondent à une même abscisse $x = 0$, de sorte que la courbe d'équilibre relative au système de ces deux points n'existe pas, en ce sens qu'elle est indéterminée et que la région de convergence, par suite, sera limitée à la fois aux deux points critiques, quel que soit le point qu'on choisisse pour point origine. Le même fait se présentera évidemment toutes les fois que la courbe représentée par l'équation proposée aura deux branches asymptotes en sens contraires à une même parallèle à l'axe des y, et généralement lorsque deux points critiques situés ou non à distance finie auront même abscisse.

La relation entre x et y n'attribuant qu'une seule valeur à y pour chaque valeur de x, la question de la construction du périmètre de la région de convergence sera ici aussi simple que possible.

Soient

$$x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$$

et

$$y_0 = \frac{c^2}{4(\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1})}$$

les coordonnées du point origine, le périmètre de la région de convergence sera caractérisé par l'équation

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (\alpha_0 - 0)^2 + (\beta_0 - 0)^2$$

ou

$$\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha + \beta^2 - 2\beta_0\beta = 0,$$

à laquelle il faudra joindre

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \frac{c^2}{4(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = \frac{c^2}{4}\frac{\alpha - \beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

d'où

$$\alpha' = \frac{c^2}{4}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad \beta' = -\frac{c^2}{4}\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Si l'on veut en coordonnées réelles l'équation du périmètre de la région de convergence, il faudra éliminer α et β entre les équations

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2(\alpha_0\alpha + \beta_0\beta),$$
$$x = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad y = \frac{c^2}{4}\frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 + \beta^2};$$

l'élimination donne

$$\begin{aligned}&[(8\beta_0 y + c^2)^2 + (8\alpha_0 y - c^2)^2]x^2 \\ &\quad + 4c^2(\alpha_0 + \beta_0)[4(\alpha_0 - \beta_0)y - c^2]x = 0,\end{aligned}$$

ou, en supprimant la solution $x = 0$, sur laquelle nous reviendrons plus tard,

$$x = -\frac{2c^2(\alpha_0 + \beta_0)[4(\alpha_0 - \beta_0)y - c^2]}{32y^2(\alpha_0^2 + \beta_0^2) + 8c^2y(\beta_0 - \alpha_0) + c^4}.$$

La courbe représentée par cette équation est asymptote à l'axe des y,

comme on devait le prévoir. Si l'on égale le dénominateur de x à zéro, on trouve

$$y = c^2 \frac{\alpha_0 - \beta_0 \pm (\alpha_0 + \beta_0)\sqrt{-1}}{8(\alpha_0^2 + \beta_0^2)};$$

par conséquent, l'abscisse de la courbe reste toujours finie, comme on devait s'y attendre.

Supposons β_0 nul, l'équation de la courbe deviendra

$$x = \frac{-8c^2\alpha_0^2 y + 2c^4\alpha_0}{32\alpha_0^2 y^2 - 8c^2\alpha_0 y + c^4}.$$

Le dénominateur de x étant toujours positif, x sera positif ou négatif, suivant que y sera plus petit ou plus grand que

$$\frac{1}{4}\frac{c^2}{\alpha_0}.$$

Si l'on fait $x = 2\alpha_0$, on trouve, pour déterminer y, l'équation

$$32\alpha_0^2 y^2 - 4c^2\alpha_0 y = 0,$$

d'où

$$y = \frac{c^2}{8\alpha_0},$$

qui correspond au point de contact de l'hyperbole avec le périmètre de la région de convergence, et

$$y = 0,$$

qui signifie

$$\alpha' = -\beta',$$

d'où

$$\alpha = \beta,$$

et, par suite,

$$\alpha = \alpha_0.$$

Le point de rencontre du périmètre de la région de convergence avec l'axe des x est donc le point du lieu $xy = \frac{c^2}{4}$ dont les coordonnées

sont

$$x = \alpha_0(1 + \sqrt{-1}),$$
$$y = \frac{c^2}{4\alpha_0}\,\frac{1-\sqrt{-1}}{2};$$

il appartient à la conjuguée dont la caractéristique est

$$-\frac{c^2}{8\alpha_0^2}.$$

L'équation du périmètre, résolue par rapport à y, donne

$$y = \frac{c^2(x-\alpha_0) \pm c^2\sqrt{-x^2+2\alpha_0 x+\alpha_0^2}}{8\alpha_0 x};$$

les racines de l'équation

$$x^2 - 2\alpha_0 x - \alpha_0^2 = 0$$

sont

$$x = \alpha_0 \pm \alpha_0\sqrt{2};$$

par conséquent, x ne peut varier qu'entre

$$-\alpha_0(\sqrt{2}-1) \quad \text{et} \quad +\alpha_0(\sqrt{2}+1);$$

les valeurs correspondantes de y sont

$$\frac{c^2}{8\alpha_0}(2+\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{8\alpha_0}(2-\sqrt{2}).$$

Supposons, pour prendre un exemple, $\alpha_0 = \frac{c}{2} = \frac{OC}{2}$: le point origine sera en A; l'ordonnée du point de rencontre de la courbe avec l'axe des y sera

$$\frac{1}{4}\frac{c^2}{\alpha_0} = \frac{c}{2};$$

ce point de rencontre sera en D; la courbe passera aux points E et B, qui correspondent à $x = 2\alpha_0 = c$.

Les limites de x seront

$$-\frac{c}{2}(\sqrt{2}-1) \quad \text{et} \quad +\frac{c}{2}(\sqrt{2}+1),$$

ou

$$OA' \pm OA,$$

c'est-à-dire

$$-OG \quad \text{et} \quad +OH;$$

les valeurs correspondantes de y seront

$$\frac{c}{4}(2+\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad \frac{c}{4}(2-\sqrt{2}),$$

ou

$$\frac{c}{2} \pm \frac{c}{2\sqrt{2}},$$

c'est-à-dire

$$OA' \pm \tfrac{1}{2}OA,$$

ce qui donnera les points J et I.

La courbe aura la forme

SJDEIBT.

Cette courbe est tout entière comprise entre l'hyperbole $xy = \frac{c^2}{4}$ et sa supplémentaire $xy = -\frac{c^2}{4}$. En effet, si l'on cherche les solutions communes à son équation

$$32\alpha_0^2 xy^2 - 8c^2\alpha_0(x-\alpha_0)y + c^4(x-2\alpha_0) = 0,$$

et à l'équation

$$xy = -\frac{c^2}{4},$$

on trouve, en remplaçant partout xy par $-\frac{c^2}{4}$,

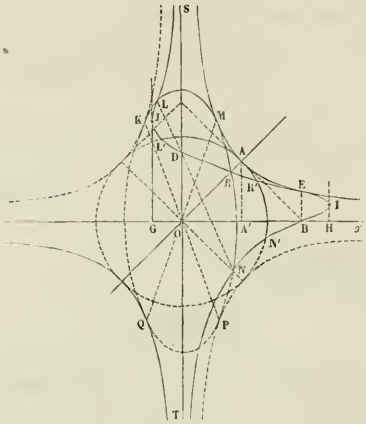
$$-8\alpha_0^2 c^2 y + 2c^4\alpha_0 + 8c^2\alpha_0^2 y + c^4 x - 2c^4\alpha_0 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Le périmètre de la région de convergence étant obtenu, il reste à

fixer le sens dans lequel cette courbe forme limite, ou à déterminer la région de convergence elle-même.

Pour cela, considérons une conjuguée de l'hyperbole donnée KLMRNPQ, qui touche la courbe réelle en M et Q, et l'enveloppe imaginaire des conjuguées en K et P, le point M étant d'ailleurs entre E et S.

Fig. 3.



Le tracé de cette courbe rencontre celui du périmètre de la région de convergence en L, R et N, et il s'agit de savoir quelles sont les limites de l'arc de cette conjuguée qui se trouve dans la région de convergence; car il ne suffit pas que les tracés de deux courbes imaginaires se coupent en un point pour que les coordonnées de ce point forment une solution commune aux équations des deux courbes, les valeurs réalisées de ces coordonnées pouvant très-bien se séparer différemment, sur les deux courbes, en parties réelles et imaginaires.

Or l'ordonnée du point M peut certainement être fournie par la série; par conséquent, l'arc LR au moins est tout entier dans la région de convergence.

Mais la rencontre R n'est qu'apparente; les coordonnées analytiques du point R de la conjuguée et du point R du périmètre de la région de convergence sont effectivement différentes; car les équations

$$(\alpha' + \beta C\sqrt{-1})(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{c^2}{4},$$

et

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = \alpha_0^2,$$

où C désigne la caractéristique d'une conjuguée, n'admettent que deux solutions. En effet, la première se décompose en

$$\alpha\alpha' - \beta^2 C = \frac{c^2}{4}, \quad \text{et} \quad \alpha C + \alpha' = 0,$$

et la seconde se réduit à

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha_0\alpha = 0;$$

en éliminant α' entre les deux premières, il vient

$$-C(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{c^2}{4},$$

et, par suite,

$$\alpha = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha_0} = -\frac{c^2}{8C\alpha_0};$$

ce qui conduit pour β à deux valeurs égales et de signes contraires

$$\pm\sqrt{-\frac{c^2}{4C} - \frac{c^4}{64C^2\alpha_0^2}}, \quad \text{ou} \quad \pm\frac{c}{8C\alpha_0}\sqrt{16C\alpha_0^2 - c^2}.$$

Chaque conjuguée n'a donc sur le périmètre de la région de convergence que deux points d'ailleurs imaginaires conjugués, comme il était facile de le prévoir, le point origine étant réel.

Pour la conjuguée KLMNPQ, ces deux points sont L et N, situés sur une même parallèle au diamètre KP de contact avec l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

L'arc de la conjuguée en question qui se trouve dans la région de convergence est donc LMN.

La rencontre R ne se présente sur la figure que parce que la partie SJDEAS de la région de convergence est, si l'on peut s'exprimer ainsi, redoublée, ou que les points qui y sont renfermés peuvent être donnés de deux manières différentes par l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \ldots,$$

comme si une partie de la portion du plan qui forme la région de convergence avait été repliée sur elle-même et que la conjuguée dût être tracée sur la portion du plan non repliée ; de sorte que sa rencontre avec la partie repliée du périmètre de la région de convergence ne serait qu'un effet de perspective.

Nous avons trouvé plus haut, pour les abscisses des points de rencontre de la conjuguée C avec le périmètre de la région de convergence,

$$-\frac{c^2}{8C\alpha_0} \pm \frac{c}{8C\alpha_0}\sqrt{-16C\alpha_0^2 - c^2};$$

pour qu'il y ait rencontre effective, il faut que

$$-16C\alpha_0^2 - c^2 > 0,$$

ou que

$$C < -\frac{c^2}{16\alpha_0^2}.$$

Or le dernier point de l'hyperbole réelle dont la série puisse donner l'ordonnée (c'est ici le point E) a pour abscisse $2\alpha_0$; le coefficient angulaire de la tangente en ce point, ou la caractéristique de la conjuguée qui y passe, est

$$-\frac{\frac{c^2}{8\alpha_0}}{2\alpha_0}, \quad \text{ou} \quad -\frac{c^2}{16\alpha_0^2};$$

les conjuguées qui ont des points dans l'intérieur de la région de convergence sont donc exclusivement celles qui touchent l'hyperbole réelle entre E et S

Lorsque la caractéristique d'une conjuguée se rapproche de l'infini, cette conjuguée tend à s'aplatir suivant l'axe des y, et la branche de droite de cette conjuguée se trouve tout entière dans la région de convergence.

En résumé, la région de convergence se compose de la portion SJDEAS du plan doublée et de la portion DEIBTD simple.

On voit maintenant pourquoi on a trouvé la solution, en apparence étrangère, $x = 0$.

Considérons maintenant l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

les points critiques sont

$$(x = +a,\ y = 0), \quad \text{et} \quad (x = -a,\ y = 0);$$

la courbe d'équilibre entre ces deux points est caractérisée par l'équation

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = (\alpha + a)^2 + \beta^2,$$

qui se réduit à $\alpha = 0$; cette courbe est donc la conjuguée à ordonnées réelles de l'ellipse proposée, ou l'hyperbole SBS'TB'T'. Le point d'arrêt sera par conséquent en A ou en A', selon que la branche de conjuguée où se trouvera le point origine touchera l'ellipse en un point de l'arc BAB' ou en un point de l'arc BA'B'.

L'équation du périmètre de la région de convergence, en supposant, par exemple, que le point d'arrêt fût le point A, résulterait de l'élimination de α, β, α', β' entre les équations

$$a^2(\alpha'^2 - \beta'^2) + b^2(\alpha^2 - \beta^2) - a^2 b^2 = 0,$$

$$a^2 \alpha' \beta' + b^2 \alpha \beta = 0,$$

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = (\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2,$$

$$\alpha + \beta = x \quad \text{et} \quad \alpha' + \beta' = y;$$

elle serait donc du huitième degré. Mais, comme le point origine n'est plus ici déterminé par son abscisse seulement, l'équation trouvée fournirait à la fois les périmètres des régions de convergence relatives aux deux origines

$$x = x_0 \quad \text{et} \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}.$$

Il vaudra donc mieux construire la courbe cherchée sans recourir à son équation.

Supposons le point origine situé sur la conjuguée à abscisses réelles en un point Ω, de sorte que β_0 sera nul et que α_0 sera égal à $O\omega$.

La série pourra donner les ordonnées de tous les points des deux arcs ΩA et ΩC, en supposant $\omega c = \omega a$; mais elle ne pourra donner l'ordonnée d'aucun point de la courbe réelle; par conséquent le point xy restera toujours sur la branche supérieure de la demi-conjuguée à laquelle il appartiendra et β' restera toujours positif. Quant à β, qui est nul au point origine, il sera positif si le point xy appartient à une conjuguée tangente à l'ellipse en un point de la demi-ellipse inférieure, et négatif dans le cas contraire.

Déterminons d'abord les conjuguées que viendra seulement toucher le périmètre de la région de convergence et au delà desquelles, par conséquent, il ne faudra plus chercher de points de la courbe.

Les points de rencontre du périmètre avec la conjuguée C du lieu sont fournis par les équations

$$a^2\alpha'^2 + b^2\alpha^2 - (a^2C^2 + b^2)\beta^2 = a^2b^2,$$
$$a^2C\alpha' + b^2\alpha = 0,$$

et

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = (a - \alpha_0)^2;$$

en éliminant α' entre les deux premières, on trouve

$$\left(\frac{b^4}{a^2C^2} + b^2\right)\alpha^2 - (a^2C^2 + b^2)\beta^2 = a^2b^2;$$

en éliminant β^2 entre celle-ci et la troisième il vient, réductions faites,

$$(b^2 + a^2c^2)^2\alpha^2 - 2a^2c^2\alpha_0(a^2c^2 + b^2)\alpha - a^6c^4$$
$$+ 2a^5c^4\alpha_0 + 2a^3b^2c^2\alpha_0 - 2a^4b^2c^2 = 0;$$

pour que cette équation ait ses deux racines égales, il faut que

$$a(\alpha_0 - a)c^2 = 2b^2,$$

d'où

$$C = \pm \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{a(\alpha_0 - a)}}.$$

Mais la solution doit se rapporter aussi bien à l'un qu'à l'autre des deux points

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha_0^2},$$

et

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha_0^2}.$$

On aurait donc dû trouver pour C quatre valeurs deux à deux égales et de signes contraires.

Cependant la solution $C = 0$, qui a été supprimée, n'était pas admissible, car en faisant $C = 0$ dans les équations primitives du problème elles deviennent

$$a^2\alpha'^2 + b^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = a^2b^2,$$

$$b^2\alpha = 0$$

et

$$\beta^2 = a^2 - 2a\alpha_0,$$

qui donnent

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pm\sqrt{a^2 - 2a\alpha_0},$$

$$\alpha' = \sqrt{\frac{2a^2b^2 - 2ab\alpha_0^2}{a^2}}, \quad \beta' = 0,$$

et, comme α_0 est plus grand que a, β et α' seraient imaginaires.

Il résulte de là que les deux valeurs de C trouvées plus haut sont bien les caractéristiques des conjuguées limites de celles que rencontre le périmètre de la région de convergence; du reste ces deux conjuguées limites ayant leurs caractéristiques égales et de signes contraires, cela explique comment elles conviennent aussi bien à l'un qu'à l'autre des deux points

$$x_0 = \alpha_0, \quad y_0 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2},$$

pris pour origines; seulement les points de contact de chaque conjuguée limite avec les périmètres des deux régions de convergence se trouvent

sur les deux branches dans lesquelles cette conjuguée est séparée par son diamètre transverse.

Il n'y aura lieu de faire varier C qu'en dehors des deux valeurs qui viennent d'être obtenues, puisque la valeur initiale de la caractéristique est $\pm\infty$.

Déterminons maintenant les points de contact du périmètre de la région de convergence avec les deux conjuguées limites dont on vient de trouver les caractéristiques.

L'équation en α

$$(b^2+a^2c^2)^2\alpha^2-2a^2c^2\alpha_0(a^2c^2+b^2)\alpha-a^6c^4$$
$$+2a^5c^4\alpha_0+2a^3b^2c^2a^0-2a^4b^2c^2=0,$$

ayant ses deux racines égales, lorsqu'on donne à C l'une des valeurs trouvées, l'une d'elles est donnée par la formule

$$\frac{a^2c^2\alpha^0}{a^2c^2+b^2}.$$

Cette valeur de α convient à la fois aux points de contact avec les deux conjuguées limites, puisque α ne dépend que de c^2.

α' sera fourni par l'équation

$$a^2C\alpha'+b^2\alpha=0.$$

Enfin β le sera par

$$(\alpha-\alpha_0)^2+\beta^2=(a-\alpha_0)^2,$$

d'où

$$\beta^2=2\alpha_0(\alpha-a)-\alpha^2+a^2.$$

D'ailleurs, nous savons que β' doit toujours rester positif; par conséquent, la valeur positive de β correspondra à la valeur positive de C, et la valeur négative de β à la valeur négative de C.

Si l'on voulait maintenant construire d'autres points de la courbe, rien ne serait plus aisé.

Les équations

$$(b^2+a^2c^2)^2\alpha^2-2a^2c^2\alpha_0(a^2c^2+b^2)\alpha-a^6c^4$$
$$+2a^5c^4\alpha_0+2a^3b^2c^2\alpha_0-2a^4b^2c^2=0,$$
$$a^2C\alpha'+b^2\alpha=0,$$
$$\beta^2=2\alpha_0(\alpha-a)-\alpha^2+a^2 \quad \text{et} \quad \beta'=C\beta$$

donneraient successivement pour chaque valeur de C les valeurs de α, α', β et β'. β' devant toujours rester positif, β devrait être de même signe que C.

La tangente en A au périmètre de la région de convergence sera évidemment la tangente à l'ellipse, car, les points infiniment voisins de A appartenant à des conjuguées tangentes à l'ellipse en des points infiniment voisins de A, et ces points devant être, sur ces conjuguées, à des distances infiniment petites de leurs points de contact avec l'ellipse, les droites qui les joindront au point A seront infiniment peu inclinées sur la tangente en A à l'ellipse.

Il importe, pour construire la courbe, de savoir si elle présente un point de rebroussement en A, auquel cas elle aurait tous ses points au-dessus de l'axe des x; cherchons donc si elle peut couper l'une des x ailleurs qu'en A.

Si l'on fait $\alpha' = -\beta'$ dans les équations du problème, il vient

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2,$$
$$b^2\alpha\beta = a^2\alpha'^2$$

et

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta^2 = (a - \alpha_0)^2.$$

En ajoutant la première et la troisième, on trouve

$$2\alpha^2 - 2\alpha_0\alpha - 2a^2 + 2a\alpha_0 = 0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 - 4a\alpha_0 + 4a^2}}{2} = \frac{\alpha_0 \pm (\alpha_0 - 2a)}{2},$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \alpha_0 - a \quad \text{et} \quad \alpha = a.$$

$\alpha = a$ donne $\beta = 0$ et correspond au point A. Considérons dans la solution

$$\alpha = \alpha_0 - a,$$

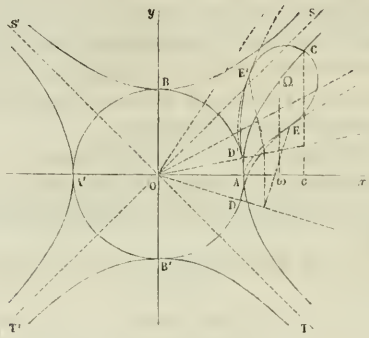
elle donne

$$\beta = \pm\sqrt{\alpha_0(\alpha_0 - 2a)},$$

qui n'est admissible que dès que α_0 dépasse $2a$.

La figure a été faite en supposant $b = a$ et $\alpha_0 = \frac{3}{2}a$. Dans ces hypothèses, les valeurs extrêmes de C sont ± 2, auxquelles correspondent les conjuguées tangentes en D et en D′, et la valeur commune des parties

Fig. 4.



réelles des abscisses des points de contact avec le périmètre de la région de convergence sont $\pm \frac{6}{5}$, ce qui fournit les points E et E′.

Le périmètre de la région de convergence est

AE′CEA.

Les deux exemples que nous venons de discuter sont les plus simples qu'on pût trouver, et il est clair que, pour peu que l'équation du lieu considéré se compliquât un peu, la discussion du problème que nous avions en vue présenterait des difficultés de détail bientôt inabordables, à cause de la longueur des calculs qu'exigerait la résolution des équations; mais la méthode resterait évidemment la même; or, nous n'avions d'autre but que de montrer que cette méthode peut bien réellement fournir la réponse à la question posée.

Mémoire sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice;

PAR M. J. BOURGET,
Docteur ès Sciences.

INTRODUCTION.

La fonction perturbatrice est

$$R = \frac{rr'\cos\delta}{r'^3} - \frac{1}{\rho},$$

en nommant

r, r' les distances au Soleil des deux planètes m et m',
δ la distance apparente des deux planètes vue du Soleil,
ρ leur distance vraie.

Il est facile de calculer les perturbations de la planète m, produites par m', quand on a développé R suivant les puissances des exponentielles imaginaires E^{iT}, $E^{iT'}$, E désignant la base des logarithmes népériens, et i le symbole $\sqrt{-1}$. On sait que chacun des termes de cette série, uni à son conjugué, fournit, au moyen d'un système d'équations différentielles simultanées, une inégalité du premier ordre par rapport à la masse perturbatrice.

Le développement de R est un problème difficile, non pas en lui-même, mais par la longueur des calculs qui s'y rapportent. On cherche habituellement à exprimer le coefficient du terme général $E^{(n'T'+nT)i}$, que nous désignerons par $A_{n,n'}$, en séries ordonnées suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons des deux planètes, quantités petites dans le plus grand nombre des cas. Pour obtenir ce résultat, on suit le plus souvent la méthode donnée par Laplace dans

la *Mécanique céleste;* mais, comme les calculs y sont superposés, on ne peut point par cette voie obtenir un terme isolé du développement; de plus, la moindre erreur dans les longs calculs que l'on est obligé de faire, quand on veut aller jusqu'à un ordre élevé, entraîne à d'autres erreurs, qu'il est impossible de corriger sans reprendre en entier tout le travail.

On comprend donc l'importance d'une méthode qui permettrait de trouver, sous forme algébrique, un coefficient déterminé $A_{n,n'}$, par une série d'opérations simples, faciles à répéter, et ne dépendant d'aucune autre.

Cette méthode a été indiquée pour la première fois par Cauchy [*]. J'ai présenté moi-même deux Mémoires à l'Institut, dans lesquels j'apportais quelques perfectionnements aux calculs de l'illustre géomètre [**]. M. Puiseux, de son côté, a publié dans le *Journal de M. Liouville* deux articles sur le même sujet [***]. C'est en lisant son travail qu'il m'a semblé possible de simplifier encore notablement la solution du problème du développement de R, par l'introduction des transcendantes de Bessel. J'ai déjà montré, dans deux autres Mémoires, que ces transcendantes fournissent une solution très-élégante du problème de Kepler et d'autres problèmes analogues [****], et qu'elles permettent de calculer par interpolation les coefficients des divers termes de la fonction perturbatrice [*****].

En résumé, j'arrive à une expression très-simple du terme général de la fonction perturbatrice; mais les quantités petites, suivant lesquelles s'ordonnent les développements en séries, ne sont pas les quantités habituelles. L'excentricité e est remplacée par $\eta = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi$, ψ étant donné par $e = \sin\psi$; l'excentricité entre aussi dans les transcendantes de Bessel définies par l'équation

$$(o, n)_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-j} E^{\frac{\pi e}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} du, \quad \text{où} \quad x = E^{u\sqrt{-1}} = E^{ui},$$

[*] *Comptes rendus de l'Académie*, t. XI.

[**] *Comptes rendus de l'Académie*, 1856, mars, juillet.

[***] *Journal de M. Liouville*, 1860.

[****] *Journal de M. Liouville*, 1861.

[*****] *Annales de l'Observatoire*, t. VII.

et l'on sait que chaque transcendante est de l'ordre marqué par la valeur absolue de son indice j. Enfin l'inclinaison mutuelle des orbites y entre par la quantité $\nu = \sin^2 \frac{1}{2} I$, qui est du second ordre. Les séries de notre développement procèdent donc suivant les puissances de η, η', ν, et suivant les facteurs $(o, n)_j$, $(o, n')_{j'}$. La symétrie des résultats nous semble faire compensation à l'accroissement du nombre des lettres ordonnatrices.

Nous remarquerons aussi que nous évitons l'emploi des transcendantes $b_s^{(i)}$ de Laplace; chaque terme de $A_{n,n'}$ se présente sous forme de série ordonnée suivant les puissances de $\alpha = \frac{a}{a'}$.

Pour arriver à l'expression explicite d'un coefficient correspondant à un argument donné, ou encore pour trouver tous les termes d'un ordre donné, il suffit de résoudre en nombres entiers et positifs certaines équations de la forme

$$x + y + z + t + u + v = n.$$

La simplicité et la régularité de cette opération permettent d'éviter toute erreur dans le résultat final.

PREMIÈRE PARTIE.

DÉVELOPPEMENT DE $\frac{1}{\rho}$.

I. — *Notations conventionnelles.*

Nous désignerons par t le temps compté à partir d'une époque quelconque prise pour origine et rapporté à l'année julienne, prise pour unité ($365^{\text{jours moy.}}, 25$). Nous prendrons pour plan fixe le plan de l'écliptique dans sa position moyenne à l'origine du temps, et nous rapporterons les longitudes à la position moyenne qu'occupe la ligne

des équinoxes à cette époque. Sur l'orbite d'une planète, nous compterons les longitudes à partir du rabattement sur cette orbite de cette ligne des équinoxes, ce rabattement s'effectuant autour de la ligne du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique.

Nous appellerons

a le demi-grand axe de l'orbite elliptique,
μ le moyen mouvement,
e l'excentricité,
f la racine $\sqrt{1-e^2}$,
ψ l'angle d'excentricité donné par l'équation $\sin\psi = e$,
η la tangente de la moitié de ψ,
ϖ la longitude du périhélie,
φ l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan fixe,
I l'inclinaison mutuelle des orbites des deux planètes considérées,
θ la longitude du nœud ascendant,
ε la longitude de l'époque,
r le rayon vecteur héliocentrique,
ρ la distance des deux planètes,
δ leur distance angulaire vue du Soleil,
s $\cos\delta$,
u l'anomalie excentrique,
v la longitude vraie,
w l'anomalie vraie ou $v - \varpi$,
T l'anomalie moyenne ou $\mu t + \varepsilon - \varpi$,
l la longitude moyenne ou $\mu t + \varepsilon$,
ζ la partie μt de la longitude moyenne dans le mouvement troublé,
m la masse de la planète rapportée à celle du Soleil,
E la base des logarithmes népériens,
i le symbole $\sqrt{-1}$,
x l'exponentielle E^{ui},
o $\cos^2\frac{1}{2}I$,
ν $\sin^2\frac{1}{2}I$,
c $\frac{e}{2\eta} = \frac{1}{1+\eta^2} = \cos^2\frac{1}{2}\psi$,

H, H′ les distances angulaires de l'intersection commune des deux orbites aux nœuds ascendants sur l'écliptique,

χ, χ' $\varpi - \theta - \mathrm{H}$, $\varpi' - \theta' - \mathrm{H}'$,

ω l'angle $\chi - \chi'$,

Ω l'angle $\chi + \chi'$,

α le rapport $\frac{a}{a'}$ des demi-grands axes,

$(o, n)_j$ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-j} \mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du.$

Les lettres non accentuées se rapportent généralement à la planète troublée m; les lettres accentuées se rapportent à la planète perturbatrice m'.

Nous poserons, en outre, pour abréger,

$$(1) \qquad (k)_l = \frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{1.2\ldots l},$$

$$(2) \qquad [k]_l = \frac{k(k+1)\ldots(k+l-1)}{1.2\ldots l},$$

le nombre k étant quelconque, et le nombre l étant entier et positif. Le symbole $(k)_l$ représente le coefficient binomial; il devra donc être regardé comme nul toutes les fois que l sera négatif ou fractionnaire, et aussi toutes les fois que l sera supérieur à k, lorsque ce dernier nombre sera entier et positif. Cette notation comprend tous les coefficients binomiaux si l'on y ajoute les deux conventions

$$(3) \qquad (k)_0 = 1, \quad (o)_0 = 1.$$

On trouve aisément que

$$(4) \qquad (k)_l = (k)_{k-l},$$

k étant entier et positif, et que

$$(5) \qquad (-k)_l = [k]_l(-1)^l.$$

Nous rappellerons maintenant les formules du mouvement ellip-

tique, dont nous aurons à faire usage,

$$(6) \qquad e = \sin\psi = \frac{2\eta}{1+\eta^2},$$

$$(7) \qquad f = \cos\psi = \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2},$$

$$(8) \qquad r = a(1 - e\cos u) = ac\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x),$$

$$(9) \qquad \begin{cases} r\cos w = a(\cos u - e), \\ r\sin w = af\sin u, \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} r\mathrm{E}^{wi} = acx\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^2, \\ r\mathrm{E}^{-wi} = ac\frac{1}{x}(1 - \eta x)^2. \end{cases}$$

Le triangle sphérique formé par le nœud ascendant I de la planète perturbatrice sur l'orbite de la planète troublée et les deux positions m et m' apparentes des planètes à l'époque t permet de transformer $\cos\delta = s$, qui entre dans la fonction perturbatrice, et l'on a

$$(11) \qquad \cos\delta = o\cos(w - w' + \omega) + \nu\cos(w + w' + \Omega),$$

ou bien

$$(12) \qquad \cos\delta = \cos(w - w' + \omega) - 2\nu\sin(w + \chi)\sin(w' + \chi').$$

De là on conclut

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr's \\ &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(w - w' + \omega) + 4\nu rr'\sin(w + \chi)\sin(w' + \chi'). \end{aligned}$$

Posons

$$(13) \qquad \mathrm{U} = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(w - w' + \omega),$$

$$(14) \qquad \mathrm{V} = 4\nu rr'\sin(w + \chi)\sin(w' + \chi'),$$

et nous aurons

$$\rho^2 = U + V. \tag{15}$$

Nous supposerons la planète perturbatrice plus éloignée du Soleil que la planète troublée; donc le rapport

$$\alpha = \frac{a}{a'} \tag{16}$$

est moindre que l'unité.

Les transcendantes de Bessel, qui s'introduisent naturellement dans notre développement, sont définies par l'équation

$$(o, n)_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-j} E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du. \tag{17}$$

Elles jouissent de propriétés remarquables; nous rappellerons les suivantes, qui nous seront utiles :

$$(o, n)_{-j} = (o, n)_j \quad \text{si } j \text{ est pair,} \tag{18}$$

$$(o, n)_{-j} = -(o, n)_j \quad \text{si } j \text{ est impair,} \tag{19}$$

$$\begin{cases} (o, o)_j = 0 & \text{si } j \text{ n'est pas nul,} \\ (o, o)_0 = 1, \end{cases} \tag{20}$$

$$(o, -n)_{-j} = (o, n)_j. \tag{21}$$

II. — *Réduction du problème du développement de $\frac{1}{\rho}$ à d'autres plus simples.*

Désignons par $B_{n,n'}$ le coefficient de l'exponentielle $E^{(nT+n'T')i}$ dans le développement de $\frac{1}{\rho}$, nous aurons

$$B_{n,n'} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} E^{-(nT+n'T')i} dT dT'.$$

Au lieu de l'anomalie moyenne, prenons pour variable l'anomalie excentrique. Comme

$$T = u - e\sin u = u - \frac{e}{2i}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

on a

$$dT = \frac{r}{a}\,du = c\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\,du, \tag{22}$$

et

$$E^{-nTi} = x^{-n}\,E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}; \tag{23}$$

d'ailleurs les limites de l'intégration restent les mêmes; donc

$$\begin{aligned} B_{n,n'} = cc'\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}x^{-n}x'^{-n'} \\ \times\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x') \\ \times E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}\cdot E^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}\,du\,du'. \end{aligned}$$

Développons maintenant $\frac{1}{\rho}$ par la formule du binôme; nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = (U + V)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{2}\right]_k U^{-\frac{2k+1}{2}}V^k,$$

k désignant un nombre entier positif qui peut être nul. Transportons la valeur de $\frac{1}{\rho}$ dans $B_{n,n'}$, nous aurons, en transposant les signes *sommes*,

$$\left\{\begin{aligned} B_{n,n'} = cc'\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{2}\right]_k \\ \times\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}U^{-\frac{2k+1}{2}}V^k x^{-n}x'^{-n'} \\ \times\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x') \\ \times E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}E^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}\,du\,du'. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Nous sommes donc ramenés aux développements de U et de V, et nous chercherons, dans ces développements, à isoler les fonctions relatives à chacune des planètes, afin de pouvoir effectuer isolément les deux intégrations.

III. — *Développement de la fonction* U.

D'après la formule (13), qui définit la fonction U, on peut poser

$$U = r'^2 \left[1 - \frac{r}{r'} E^{(w-w'+\omega)i}\right]\left[1 - \frac{r}{r'} E^{-(w-w'+\omega)i}\right],$$

ou bien

$$U = r'^2 \left(1 - \frac{r E^{wi}}{r' E^{w'i}} E^{\omega i}\right)\left(1 - \frac{r E^{-wi}}{r' E^{-w'i}} E^{-\omega i}\right).$$

Au moyen des formules (8) et (10), cette expression devient

$$U = a'^2 c'^2 \left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^2 (1 - \eta' x')^2 \left[1 - \alpha \frac{c}{c'} \frac{x}{x'} \frac{\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^2}{\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^2} E^{\omega i}\right]$$
$$\times \left[1 - \alpha \frac{c}{c'} \frac{x'}{x} \frac{(1 - \eta x)^2}{(1 - \eta' x')^2} E^{-\omega i}\right].$$

Élevons maintenant les deux membres à la puissance $\frac{2k+1}{2}$, et nous aurons

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} U^{-\frac{2k+1}{2}} = {} & (a'c')^{-(2k+1)} \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q \left[\frac{2k+1}{2}\right]_p \left[\frac{2k+1}{2}\right]_q \left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{p+q} E^{(p-q)\omega i} \\ & \times x^{p-q} \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^{2p} (1 - \eta x)^{2q} \\ & \times x'^{-p+q} \left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^{-(2k+2p+1)} (1 - \eta' x')^{-(2k+2q+1)}. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, x et x', relatives à chacune des planètes, se trouvent dans des facteurs simples différents; nous nous y arrêterons.

IV. — *Développement de la fonction* V.

La fonction V, donnée par la formule (14), peut se mettre sous la forme

$$V = \nu . 2r \sin(w + \chi) 2r' \sin(w' + \chi').$$

Remplaçons les sinus par des exponentielles imaginaires; nous aurons

$$V = (-1)\nu (r E^{wi} E^{\chi i} - r E^{-wi} E^{-\chi i})(r' E^{w'i} E^{\chi' i} - r' E^{-w'i} E^{-\chi' i});$$

introduisons maintenant les anomalies excentriques, et nous obtiendrons

$$\begin{aligned} V = -\nu aa'cc' &\left[x\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^2 E^{\chi i} - \frac{1}{x}(1 - \eta x)^2 E^{-\chi i}\right] \\ &\times \left[x'\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^2 E^{\chi' i} - \frac{1}{x'}(1 - \eta' x')^2 E^{-\chi' i}\right]. \end{aligned}$$

Élevons maintenant les deux membres à la puissance entière k; il viendra

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} V^k = (aa'cc')^k \nu^k \sum_0^\infty{}_g \sum_0^\infty{}_{g'} &(-1)^{k+g+g'} (k)_g (k)_{g'} E^{(k-2g)\chi i} E^{(k-2g')\chi' i} \\ &\times x^{k-2g}\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^{2k-2g} (1 - \eta x)^{2g} \\ &\times x'^{k-2g'}\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^{2k-2g'} (1 - \eta' x')^{2g'}. \end{aligned} \right.$$

Nous nous arrêterons à cette formule, dans laquelle les variables relatives à chacune des planètes se trouvent dans des facteurs simples différents.

Remarque. — Nous avons étendu jusqu'à l'infini les valeurs de g et de g'; mais il est clair qu'au delà de k les valeurs de ces deux nombres donneront zéro pour $(k)_g$ et $(k)_{g'}$; cette extension ne présente donc aucun inconvénient.

V. — *Formule générale du coefficient* $B_{n,n'}$.

Pour arriver à cette formule, il suffit maintenant de substituer, dans l'équation (24), les valeurs de $U^{-\frac{2k+1}{2}}$, V^k, données par les équations (25) et (26). En donnant quelque attention au calcul de cette substitution, on voit que l'intégrale double primitive se trouve remplacée, dans chaque terme, par un produit de deux intégrales simples, et l'on obtient

$$\begin{aligned}
B_{n,n'} = \frac{c'}{a} \sum_0^\infty{}_k \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q \sum_0^\infty{}_g \sum_0^\infty{}_{g'} (-1)^{g+g'} \left[\frac{1}{2}\right]_k \left[\frac{2k+1}{2}\right]_p \left[\frac{2k+1}{2}\right]_q (k)_g (k)_{g'} \\
\times \left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{k+p+q+1} \nu^k \, E^{(p-q)\omega i + (k-2g)\chi i + (k-2g')\chi' i} \\
\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^{-n+p-q+k-2g} \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^{2p+2k-2g+1} (1 - \eta x)^{2q+2g+1} \\
\times E^{\frac{nc}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du \\
\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x'^{-n'-p+q+k-2g'} \left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^{-2p-2g'} (1 - \eta' x')^{-2q-2k+2g'} \\
\times E^{\frac{n'c'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du'.
\end{aligned}$$

Posons

$$\gamma = k - g, \quad \gamma' = k - g', \tag{27}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma &= (p-q)\omega + (k-2g)\chi + (k-2g')\chi' \\ &= (p-q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{aligned} \right. \tag{28}$$

puis développons les facteurs sous les intégrales par les formules suivantes :

$$\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^{2p+2k-2g+1} = \sum_0^\infty{}_\lambda (-1)^\lambda (2p + 2\gamma + 1)_\lambda \eta^\lambda x^{-\lambda},$$

$$(1 - \eta x)^{2q+2g+1} = \sum_0^\infty{}_\mu (-1)^\mu (2q + 2g + 1)_\mu \eta^\mu x^\mu,$$

$$\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^{-(2p+2g')} = \sum_0^\infty{}_{\lambda'} [2p + 2g']_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} x'^{-\lambda'},$$

$$(1 - \eta' x')^{-(2q+2k-2g')} = \sum_0^\infty{}_{\mu'} [2q + 2\gamma']_{\mu'} \eta'^{\mu'} x'^{\mu}.$$

Si maintenant nous substituons dans la formule ci-dessus de $B_{n,n'}$, et si nous faisons usage des transcendantes de Bessel $(o, n)_j$, nous obtiendrons, après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned}
B_{n,n'} = \frac{c'}{a} \sum_0^\infty{}_k \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q \sum_0^\infty{}_g \sum_0^\infty{}_{g'} \sum_0^\infty{}_\lambda \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_{\lambda'} \sum_0^\infty{}_{\mu'} (-1)^{g+g'+\lambda+\mu} E^{\sigma i} \\
\times \left[\frac{1}{2}\right]_k \left[\frac{2k+1}{2}\right]_p \left[\frac{2k+1}{2}\right]_q (k)_g (k)_{g'} (2p+2\gamma+1)_\lambda \\
\times (2q+2g+1)_\mu [2p+2g']_{\lambda'} [2q+2\gamma']_{\mu'} \\
\times \left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{k+p+q+1} \nu^k \eta^{\lambda+\mu} \eta'^{\lambda'+\mu'} (o, n)_{n-p+q-\gamma+g+\lambda-\mu} \\
\times (o, n')_{n'+p-q-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'}.
\end{aligned}$$

Nous poserons encore, pour abréger,

$$\lambda + \mu = m, \tag{29}$$

$$\lambda' + \mu' = m', \tag{30}$$

et

$$n - p + q - \gamma + g + \lambda - \mu = j = \pm h \quad (h \geq o), \tag{31}$$

$$n' + p - q - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' = j' = \pm h' \quad (h' \geq o). \tag{32}$$

La formule du terme général $B_{n,n'}$ se simplifiera et deviendra

$$\left\{\begin{aligned}
B_{n,n'} = \frac{c'}{a} \sum_0^\infty{}_k \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q \sum_0^\infty{}_g \sum_0^\infty{}_{g'} \sum_0^\infty{}_\lambda \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_{\lambda'} \sum_0^\infty{}_{\mu'} (-1)^{g+g'+m} E^{\sigma i} \\
\times \left[\frac{1}{2}\right]_k \left[\frac{2k+1}{2}\right]_p \left[\frac{2k+1}{2}\right]_q (k)_g (k)_{g'} (2p+2\gamma+1)_\lambda \\
\times (2q+2g+1)_\mu [2p+2g']_{\lambda'} [2q+2\gamma']_{\mu'} \\
\times \left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{k+p+q+1} \nu^k \eta^m \eta'^{m'} (o, n')_j (o, n')_{j'}.
\end{aligned}\right. \tag{33}$$

Mais il faut, pour les applications numériques, revenir aux quantités réelles. Pour cela, remarquons qu'en remplaçant dans le terme

de la série, qui a $B_{n,n'}$ pour coefficient, les lettres

$$n,\quad n',\ p,\ q,\ g,\ g',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu',\ \gamma,\ \gamma',$$

respectivement par

$$-n, -n',\ q,\ p,\ \gamma,\ \gamma',\ \mu,\ \lambda,\ \mu',\ \lambda',\ g,\ g',$$

tous les facteurs de ces termes restent les mêmes, et σ change seul de signe. Or le premier $B_{n,n'}$ est le coefficient de $E^{(nT+n'T')i}$; le second est le coefficient de $E^{-(nT+n'T')i}$. Donc, dans $\frac{1}{\rho}$, nous trouvons les deux termes

$$ME^{(nT+n'T'+\sigma)i},$$
$$ME^{-(nT+n'T'+\sigma)i},$$

qui, réunis, donnent le terme unique

$$(34)\qquad 2M\cos(nT+n'T'+\sigma),$$

et l'on a ainsi, pour le coefficient $2M$ du cosinus d'un argument donné,

$$\cos(nT+n'T'+\sigma),$$

la formule simple suivante :

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} 2M = {} & \frac{2c'}{a}(-1)^{g+g'+m}\left[\frac{1}{2}\right]_k\left[\frac{2k+1}{2}\right]_p\left[\frac{2k+1}{2}\right]_q(k)_g(k)_g \\ & \times(2p+2\gamma+1)_\lambda(2q+2g+1)_\mu[2p+2g']_{\lambda'} \\ & \times[2q+2\gamma']_{\mu'}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{k+p+q+i}\nu^k\eta'^m\eta'^{m'}(o,n)_j(o,n')_{j'}. \end{aligned}\right.$$

La formule (34) donne un des termes du développement de $\frac{1}{\rho}$; nous obtiendrons tous les termes de ce développement en donnant aux divers nombres

$$n,\ n',\ k,\ p,\ q,\ g,\ g',\ \gamma,\ \gamma',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu'$$

toutes les valeurs possibles. Toutefois il ne faudra pas donner à ces nombres un système de valeur conjugué d'un autre, ou tel que l'on reproduise le même terme $2M\cos(nT + n'T' + \sigma)$. On évitera la possibilité de cette rencontre en convenant de ne donner à n' que des valeurs positives, les autres nombres recevant toutes les valeurs possibles. Cette supposition restrictive est permise, puisque, en imaginant écrits tous les termes de la forme (34), on peut changer les signes des arcs de manière à rendre positifs les coefficients de T'.

Remarque. — Si nous trouvons que plusieurs termes correspondent aux mêmes valeurs de k, n, n', p, q, g, g', le nombre σ ne variera pas, et le terme (34) ne variera que par son coefficient $2M$. On obtiendra donc une série de termes correspondant tous au même

$$\cos(nT + n'T' + \sigma).$$

Nous allons voir qu'il en est toujours ainsi, et que chacun de ces cosinus est en effet multiplié par une série indéfinie de coefficients $2M$. Cette série se limite naturellement par sa convergence dans le cours des applications numériques.

VI. — *Degré d'un terme relativement aux excentricités et à l'inclinaison.*

Nous regarderons e et η comme du même ordre de petitesse, et $\nu = \sin^2 \frac{1}{2} I$ comme du second ordre. Les transcendantes de Bessel sont, d'après leur définition, d'un ordre marqué par le *module* ou la valeur absolue de leur indice. D'après cela, l'ordre Δ d'un terme sera donné par la formule

$$\Delta = 2k + m + m' + h + h'. \tag{36}$$

Il existe entre Δ et l'*argument* $(n + n')$ une relation remarquable et très-importante que nous allons faire connaître. Posons les deux équations

$$n - p + q - \gamma + g + \lambda - \mu = j = \pm h,$$
$$n' + p - q - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' = j' = \pm h',$$

tirons-en la valeur de $n + n'$

$$n + n' = \gamma + \gamma' - g - g' - \lambda - \lambda' + \mu + \mu' + j + j';$$

de là nous déduisons

$$\Delta - (n + n') = 2g + 2g' + 2\lambda + 2\lambda' + h + h' - j - j',$$
$$\Delta + (n + n') = 2\gamma + 2\gamma' + 2\mu + 2\mu' + h + h' + j + j'.$$

Distinguons maintenant les divers cas qui peuvent se présenter dans la distribution des signes de j et de j', nous formerons le tableau suivant :

PREMIER CAS : $j \geq 0$, $j' \geq 0$.

$$\Delta - (n + n') = 2(g + g' + \lambda + \lambda'),$$
$$\Delta + (n + n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu' + h + h').$$

DEUXIÈME CAS : $j \geq 0$, $j' < 0$.

$$\Delta - (n + n') = 2(g + g' + \lambda + \lambda' + h'),$$
$$\Delta + (n + n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu' + h).$$

TROISIÈME CAS : $j < 0$, $j' \geq 0$.

$$\Delta - (n + n') = 2(g + g' + \lambda + \lambda' + h),$$
$$\Delta + (n + n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu' + h').$$

QUATRIÈME CAS : $j < 0$, $j' < 0$.

$$\Delta - (n + n') = 2(g + g' + \lambda + \lambda' + h + h'),$$
$$\Delta + (n + n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu').$$

Nous pouvons donc formuler le théorème suivant :

Le degré d'un terme est au moins égal à la valeur absolue de l'argument, et quand il le surpasse, c'est d'un nombre pair positif.

Ce théorème, bien connu d'ailleurs, est très-important à signaler dans notre méthode de développement. On peut en tirer une solution facile des deux questions suivantes, qui se présentent dans les applications de la Mécanique céleste :

1° Trouver tous les termes correspondant à un argument $nT + n'T'$ donné;

2° Trouver tous les termes d'un ordre donné.

Pour faciliter toutes les applications ultérieures, nous allons donner les tableaux des formules dont nous ferons usage; elles se distribuent en deux catégories, suivant le signe de $(n+n')$. Chacune des catégories renferme quatre tableaux, que nous distinguerons par les lettres

$$\begin{array}{llll} A_1, & A_2, & A_3, & A_4, \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4. \end{array}$$

VII. — *Tableau des formules propres aux applications.*

Premier cas : $n+n' \geq 0$.

$$(A_1)\left\{\begin{array}{l} j \geq 0 \\ j' \geq 0 \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} \Delta-(n+n')=2(g+g'+\lambda+\lambda'), \\ \Delta=2k+m+h+m'+h', \\ q=p+n'-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'-h', \\ \sigma=(p-q)\omega+(\gamma-g)\chi+(\gamma'-g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$(A_2)\left\{\begin{array}{l} j \geq 0 \\ j' < 0 \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} \Delta-(n+n')=2(g+g'+\lambda+\lambda'+h'), \\ \Delta=2k+m+h+m'+h', \\ q=p+n'-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'+h', \\ \sigma=(p-q)\omega+(\gamma-g)\chi+(\gamma'-g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$(A_3)\left\{\begin{array}{l} j < 0 \\ j' \geq 0 \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} \Delta-(n+n')=2(g+g'+\lambda+\lambda'+h), \\ \Delta=2k+m+h+m'+h', \\ q=p+n'-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'-h', \\ \sigma=(p-q)\omega+(\gamma-g)\chi+(\gamma'-g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$(A_4)\left\{\begin{array}{l} j < 0 \\ j' < 0 \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} \Delta-(n+n')=2(g+g'+\lambda+\lambda'+h+h'), \\ \Delta=2k+m+h+m'+h', \\ q=p+n'-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'+h', \\ \sigma=(p-q)\omega+(\gamma-g)\chi+(\gamma'-g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \lambda+\mu=m, \\ \lambda'+\mu'=m', \\ \gamma+g=k, \\ \gamma'+g'=k. \end{array}$$

Deuxième cas : $n + n' < 0$.

$$(B_1)\left\{\begin{array}{l} j \geq 0 \\ j' \geq 0 \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} \Delta + (n + n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu' + h + h'), \\ \Delta = 2k + m + h + m' + h', \\ q = p + n' - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' - h', \\ \sigma = (p - q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$(B_2)\left\{\begin{array}{l} j \geq 0 \\ j' < 0 \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} \Delta + (n + n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu' + h), \\ \Delta = 2k + m + h + m' + h', \\ q = p + n' - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' + h', \\ \sigma = (p - q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$(B_3)\left\{\begin{array}{l} j < 0 \\ j' \geq 0 \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} \Delta + (n + n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu' + h'), \\ \Delta = 2k + m + h + m' + h', \\ q = p + n' - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' - h', \\ \sigma = (p - q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$(B_4)\left\{\begin{array}{l} j < 0 \\ j' < 0 \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} \Delta + (n + n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu'), \\ \Delta = 2k + m + h + m' + h', \\ q = p + n' - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' + h', \\ \sigma = (p - q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \lambda + \mu = m, \\ \lambda' + \mu' = m', \\ \gamma + g = k, \\ \gamma' + g' = k. \end{array}$$

VIII. — *Trouver tous les termes correspondant à un argument donné.*

Dans ce cas, les nombres n et n' sont connus; donc on connaît aussi leur somme $n + n'$. Nous savons que le degré Δ est au moins égal à la valeur absolue de $n + n'$; donc on posera successivement

$$\begin{array}{l} \Delta = \text{mod.}(n + n') \\ \Delta = \text{mod.}(n + n') + 2, \\ \Delta = \text{mod.}(n + n') + 4. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On prendra à part chacune de ces hypothèses, et suivant le signe de $n + n'$, on lui appliquera les relations A, ou les relations B.

La première équation étant résolue, on passera à la seconde pour chaque système de solutions de la première; on connaîtra donc les nombres

$$g,\ g',\ \lambda,\ \lambda',\ \gamma,\ \gamma',\ \mu,\ \mu',\ k,\ m,\ h,\ m',\ h'.$$

On en déduira q en fonction de p et σ. Dans chacun des termes formés, on devra donner à p toutes les valeurs entières et positives depuis zéro jusqu'à l'infini; chacun des termes représente donc une série indéfinie; mais cette série est ordonnée suivant les puissances de $\frac{\alpha c}{c'}$, et elle se limitera d'elle-même dans les applications numériques.

Remarque. — Il existe une formule très-simple, exprimant le nombre des solutions distinctes d'une équation à $p + 1$ inconnues de la forme

$$x + y + z + \ldots = n,$$

en nombres entiers, nuls ou positifs. En nommant $C_m^{(n)}$ le nombre des combinaisons de m objets n à n, on trouve que le nombre des solutions demandées est

$$(37) \qquad C_{n+p}^{p} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{1.2\ldots p}.$$

On arrive facilement à cette conséquence en considérant successivement des équations à 2, 3,... inconnues.

Cette remarque nous servira à vérifier que, dans un calcul déterminé, nous n'avons oublié aucune solution.

IX. — *Trouver tous les termes d'un ordre donné.*

Dans ce cas, nous connaissons Δ. Les nombres n et n' peuvent varier et nous allons indiquer comment on peut trouver régulièrement tous les arguments qui correspondent à cet ordre, et les coefficients des termes de $\frac{1}{\rho}$ relatifs à chacun d'eux.

Nous savons que la valeur absolue de $n + n'$ est au plus égale à Δ, et plus généralement lui est inférieure d'un nombre pair. Nous poserons donc successivement

$$\begin{array}{ll} n + n' = \Delta, & n + n' = -\Delta, \\ n + n' = \Delta - 2, & n + n' = -\Delta + 2, \\ n + n' = \Delta - 4, & n + n' = -\Delta + 4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

jusqu'à ce que Δ soit épuisé. S'il est pair, on arrivera à poser $n + n' = 0$; s'il est impair, on terminera en posant $n + n' = 1$, $n + n' = -1$.

Après avoir numéroté toutes les hypothèses possibles, on passera à la résolution des équations A ou B, suivant le signe de $n + n'$. On déduira de ces équations

$$g,\ g',\ \lambda,\ \lambda',\ \gamma,\ \gamma',\ \mu,\ \mu',\ k,\ m,\ h,\ m',\ h',\ q,\ n,$$

en fonction de p et de n'. Ces nombres entiers et positifs devront ensuite recevoir toutes les valeurs possibles y compris zéro.

Dans les applications on se trouvera limité naturellement par les puissances de $\frac{\alpha c}{c'}$, qui décroissent et deviennent bientôt négligeables.

SECONDE PARTIE.

DÉVELOPPEMENT DE $\frac{rr's}{r'^3}$.

I. — *Réduction du problème à d'autres plus simples.*

Désignons par

$$C_{n,n'}$$

le coefficient de $E^{(nT + n'T')i}$; dans ce développement, nous aurons

$$C_{n,n'} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{rs}{r'^2} E^{-(nT + n'T')i}\, dT\, dT'.$$

Prenons pour variables les anomalies excentriques, au lieu des anomalies moyennes, il viendra (II, première Partie):

$$C_{n,n'} = cc' \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{rs}{r'^2} x^{-n} x'^{-n'} \times \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x') \times E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} E^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du\,du'.$$

Mais nous avons

$$\frac{rs}{r'^2} = \frac{r}{r'^2}\left[o\cos(w - w' + \omega) + \nu\cos(w + w' + \Omega)\right];$$

donc en posant

$$C'_{n,n'} = cc'o \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\cos(w - w' + \omega)}{r'^2} x^{-n} x'^{-n'} \times \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x') \times E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} E^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du\,du',$$

et

$$C''_{n,n'} = cc'\nu \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\cos(w - w' + \Omega)}{r'^2} x^{-n} x'^{-n'} \times \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x') \times E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} E^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du\,du',$$

on a

$$C_{n,n'} = C'_{n,n'} + C''_{n,n'},$$

et le problème proposé est ramené à l'évaluation des intégrales $C'_{n,n'}$ et $C''_{n,n}$.

II. — *Développement de l'intégrale* $C'_{n,n'}$. *Formule des termes de* R *qui en proviennent.*

Transformons $\cos(w - w' + \omega)$ en exponentielles imaginaires, nous aurons (I, première Partie)

$$\frac{1}{r'}\frac{r}{r'}\cos(w - w' + \omega) = \frac{1}{2r'}\left(\frac{rE^{wi}}{r'E^{w'i}}E^{\omega i} + \frac{rE^{-wi}}{r'E^{-w'i}}E^{-\omega i}\right):$$

remplaçons maintenant r', $r\mathrm{E}^{wi}$, $r\mathrm{E}^{-wi}$, $r'\mathrm{E}^{wi'}$, $r'\mathrm{E}^{-wi'}$ par leurs valeurs en η, x, η', x' trouvées dans la première Partie, nous aurons

$$\frac{r\cos(w - w' + \omega)}{r'^2}$$
$$= \frac{1}{2ac}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \frac{\mathrm{E}^{\omega i} x x'^{-1}\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^2\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^{-2} + \mathrm{E}^{-\omega i} x^{-1} x'(1-\eta x)^2(1-\eta' x')^{-2}}{\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)(1-\eta' x')}.$$

Substituons cette expression dans la formule de $C'_{n,n'}$, elle se séparera en deux intégrales plus simples et nous aurons

$$C'_{n,n'} = \frac{0}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \mathrm{E}^{\omega i}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n+1} x'^{-n'-1}$$
$$\times\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^3(1-\eta x)\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^{-2}$$
$$\times \mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\mathrm{E}^{\frac{n'e'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}\,du\,du'$$
$$+\frac{0}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \mathrm{E}^{\omega i}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n-1} x^{-n'+1}$$
$$\times\left(1-\frac{\eta}{x}\right)(1-\eta x)^3(1-\eta' x')^{-2}$$
$$\times \mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\mathrm{E}^{\frac{n'e'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}\,du\,du'.$$

Posons pour abréger

$$(38)\qquad G_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n+1}\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^3(1-\eta x)\,\mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\,du,$$

$$(39)\qquad H_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n-1}\left(1-\frac{\eta}{x}\right)(1-\eta x)^3\,\mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\,du,$$

$$(40)\qquad \left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^{-2} = \sum_0^\infty{}_{\lambda'}\,[2]_{\lambda'}\,\eta'^{\lambda'}x'^{\lambda'},$$

$$(41)\qquad (1-\eta' x')^{-2} = \sum_0^\infty{}_{\mu'}\,[2]_{\mu'}\,\eta'^{\mu'}x'^{\mu'},$$

et nous obtiendrons la formule simple que voici :

$$C'_{n,n'} = \frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \left[E^{\omega i} G_n \sum_{o}^{\infty}{}_{\lambda'} [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} (o, n')_{n'+1+\lambda'} \right.$$
$$\left. + E^{-\omega i} H_n \sum_{o}^{\infty}{}_{\mu'} [2]_{\mu'} \eta'^{\mu'} (o, n')_{n'-1-\mu'} \right].$$

Remarque. — Les quantités G_n et H_n sont des transcendantes auxiliaires, mais il est facile de les évaluer au moyen des transcendantes de Bessel; en effet

$$\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^3 (1 - \eta x) = 1 + \eta^2 - \eta\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\eta(1 + \eta^2)\frac{1}{x}$$
$$+ 2\eta^2 \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \eta^2(1 + \eta^2)\frac{1}{x^2} - \eta^3\left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2},$$

ou

$$= -\eta x + (1 + 3\eta^2) - 3\eta(1 + \eta^2)\frac{1}{x} + \eta^2(3 + \eta^2)\frac{1}{x^2} - \frac{\eta^3}{x^3};$$

donc

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} G_n = {} & (1 + \eta^2)(o, n)_{n-1} - \eta(1, n)_{n-1} - 2\eta(1 + \eta^2)(o, n)_n \\ & + 2\eta^2(1, n)_n + \eta^2(1 + \eta^2)(o, n)_{n+1} - \eta^3(1, n)_{n+1}, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} G_n = {} & -\eta(o, n)_{n-2} + (1 + 3\eta^2)(o, n)_{n-1} - 3\eta(1 + \eta^2)(o, n)_n \\ & + \eta^2(3 + \eta^2)(o, n)_{n+1} - \eta^3(o, n)_{n+2}. \end{aligned} \right.$$

De même

$$(1 - \eta x)^3 \left(1 - \frac{\eta}{x}\right) = 1 + \eta^2 - \eta\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\eta(1 + \eta^2)x$$
$$+ 2\eta^2 x\left(x + \frac{1}{x}\right) + \eta^2(1 + \eta^2)x^2 - \eta^3\left(x + \frac{1}{x}\right)x^2,$$

ou

$$= -\frac{\eta}{x} + (1 + 3\eta^2) - 3\eta(1 + \eta^2)x + \eta^2(3 + \eta^2)x^2 - \eta^3 x^3;$$

donc

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} H_n = {} & (1+\eta^2)(o,n)_{n+1} - \eta(1,n)_{n+1} - 2\eta(1+\eta^2)(o,n)_n \\ & + 2\eta^2(1,n)_n + \eta^2(1+\eta^2)(o,n)_{n-1} - \eta^3(1,n)_{n-1}, \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} H_n = {} & -\eta(o,n)_{n+2} + (1+3\eta^2)(o,n)_{n+1} - 3\eta(1+\eta^2)(o,n)_n \\ & + \eta^2(3+\eta^2)(o,n)_{n-1} - \eta^3(o,n)_{n-2}. \end{aligned}\right.$$

De ces formules et des propriétés des transcendantes de Bessel, il résulte que

$$(44)\qquad 1^\circ \qquad H_{-n} = G_n;$$

2° L'ordre de G_n, relativement à e ou η considérés comme lettres ordonnatrices, est égal au *module* de $(n-1)$;

3° L'ordre de H_n est égal au *module de* $(n+1)$.

Ces transcendantes seront faciles à calculer quand on aura le tableau des transcendantes de Bessel pour une planète. Dans la pratique, le calcul se simplifiera en négligeant, dans chacune de ces quantités G_n, H_n, les parties d'ordre supérieur à mod. $(n-1)$, mod. $(n+1)$.

La remarque précédente va nous permettre de trouver facilement la formule de tous les termes R qui se rapportent à $C'_{n,n'}$.

En effet, multiplions $C'_{n,n'}$ par $E^{(nT+n'T')i}$, nous aurons pour la formule des termes de R qui se rapportent à cette partie

$$\frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda'} [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} G_n(o,n')_{n'+1+\lambda'} E^{(nT+n'T'+\omega)i}$$
$$+ \frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu'} [2]_{\mu'} \eta'^{\mu'} H_n(o,n')_{n'-1-\mu'} E^{(nT+n'T'-\omega)i}.$$

Nous obtenons donc deux séries indéfinies de termes; car il faut faire varier dans chacune des parties ci-dessus

$$\lambda',\ \mu' \quad \text{de} \quad 0 \quad \text{à} \quad +\infty,$$
$$n,\ n' \quad \text{de} \quad -\infty \quad \text{à} \quad +\infty.$$

Mais remarquons que ces deux séries sont indépendantes l'une de l'autre; donc nous pouvons, dans la seconde, mettre λ' à la place de μ', et remplacer n et n' par $-n$ et $-n'$; d'où il résulte que l'ensemble des termes qui constituent ces deux séries peut se partager en groupes de deux ayant la forme suivante :

$$\frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'}\{G_n(o, n')_{n'+1+\lambda'}E^{(nT+n'T'+\omega)i} + H_{-n}(o, n')_{-n'-1-\lambda'}E^{-(nT+n'T'+\omega)i}\}.$$

Or

$$H_{-n} = G_n, \quad (o, -n')_{-n'-1-\lambda'} = (o, n')_{n'+1+\lambda'};$$

donc ce groupe se réduit à

$$o\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'} G_n(o, n')_{n'+1+\lambda'}\cos(nT + n'T' + \omega),$$

et pour obtenir tous les groupes pareils, dont l'ensemble constitue la série des termes que l'on cherche, il faut, dans la dernière formule, faire varier

$$\begin{array}{llll} \lambda' & \text{de} & o & \text{à} \quad +\infty, \\ n,\ n' & \text{de} & -\infty & \text{à} \quad +\infty. \end{array}$$

Supposons que, λ' conservant la même valeur, n et n' changent de signes, la formule précédente donnera le groupe

$$o\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'} H_n(o, n')_{n'-1-\lambda'}\cos(nT + n'T' - \omega).$$

Réunissons ces deux termes, et nous aurons le terme suivant :

$$(45)\quad \left\{ o\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'}\{G_n(o, n')_{n'+1+\lambda'}\cos(nT + n'T' + \omega) + H_n(o, n')_{n'-1-\lambda'}\cos(nT + n'T' - \omega)\}.\right.$$

Pour former avec ce terme unique tous les termes cherchés, il faut éviter de donner, pour la même valeur de λ', à n et n' des valeurs égales et de signes contraires à celles qu'on aurait déjà prises; car on reformerait inutilement un terme déjà formé.

On évitera ce danger en faisant varier

$$\begin{array}{llll} \lambda' \text{ et } n' & \text{de} & 0 & \text{à} \quad +\infty, \\ n & \text{de} & -\infty & \text{à} \quad +\infty. \end{array}$$

Nous nous arrêterons à ce résultat, dont la forme est simple et réelle.

III. — *Développement de l'intégrale* $C''_{n,n'}$. *Formule des termes de* R *qui en proviennent.*

Nous pouvons faire sur cette seconde partie de $C_{n,n'}$ des calculs analogues à ceux que nous avons faits sur la première; nous trouvons facilement que l'on peut lui donner la forme

$$\begin{aligned} C''_{n,n'} = \frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 E^{\Omega i}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} & x^{-n+1}x'^{-n'+1} \\ & \times\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^3(1-\eta x)(1-\eta' x')^{-2} \\ & \times E^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}E^{\frac{n'e'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}\,du\,du' \\ + \frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 E^{-\Omega i}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} & x^{-n-1}x^{-n'-1} \\ & \times\left(1-\frac{\eta}{x}\right)(1-\eta x)^3\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^{-2} \\ & \times E^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}E^{\frac{n'e'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}\,du\,du'; \end{aligned}$$

donc, en vertu des notations adoptées dans le paragraphe précédent, nous aurons

$$\begin{aligned} C''_{n,n'} = \frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \Bigg[& E^{\Omega i}G_n\sum_0^\infty{}_{\mu'}[2]_{\mu'}\eta'^{\mu'}(o,u')_{n'-1-\mu'} \\ & + E^{-\Omega i}H_n\sum_0^\infty{}_{\lambda'}[2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'}(o,u')_{n'+1+\lambda'}\Bigg]. \end{aligned}$$

Multiplions maintenant $C''_{n,n'}$ par $E^{(nT+n'T')i}$, nous aurons, pour la for-

mule des termes de R correspondants,

$$\frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu'} [2]_{\mu'} \eta'^{\mu'} G_n(0, n')_{n'+1+\mu'} E^{(nT+n'T'+\Omega)i}$$

$$+ \frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda'} [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} H_n(0, n')_{n'+1+\lambda'} E^{(nT+n'T'-\Omega)i}.$$

Nous obtenons ainsi deux séries indéfinies de termes; car il faut faire varier

$$\begin{array}{llll} \lambda' \text{ et } \mu' & \text{de} & 0 & \text{à } +\infty, \\ n \quad n' & \text{de} & -\infty & \text{à } +\infty. \end{array}$$

Ces deux séries sont indépendantes l'une de l'autre; nous pouvons donc remplacer, dans la première, μ' par λ'. Nous pouvons aussi changer le signe de n' dans les deux; nous prendrons ensuite dans la seconde série, pour la même valeur de λ', des nombres n et n' égaux et de signes contraires à ceux que nous aurons choisis dans la première. Il résultera de là que l'ensemble des termes qui constituent les deux séries peut se partager en groupes de deux ayant la forme suivante :

$$\frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} [G_n(0, n')_{n'+1+\lambda'} E^{(nT-n'T'+\Omega)i}$$
$$+ H_{-n}(0, -n')_{-n'-1-\lambda'} E^{-(nT-n'T'+\Omega)i}].$$

Ce groupe se réduit donc à

$$\nu \frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} G_n(0, n')_{n'+1+\lambda'} \cos(nT - n'T' + \Omega);$$

et, pour obtenir tous les groupes pareils dont l'ensemble constitue la série des termes que l'on cherche, il faut faire varier

$$\begin{array}{lll} \lambda' & \text{de } 0 & \text{à } +\infty, \\ n, n' & \text{de } -\infty & \text{à } +\infty. \end{array}$$

Supposons que, λ' conservant la même valeur, n et n' changent de

signes, la formule précédente donnera

$$\nu \frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} \mathrm{H}_n(o, n')_{n'+1-\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' - \Omega).$$

Réunissons ces deux termes, nous aurons le groupe

$$(46)\quad \left\{ \begin{aligned} &\nu \frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} [\mathrm{G}_n(o, n')_{n'+1+\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' + \Omega) \\ &\qquad + \mathrm{H}_n(o, n')_{n'-1-\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' - \Omega)]. \end{aligned} \right.$$

Pour former avec ce terme unique tous les termes cherchés, il faut faire varier

$$\begin{array}{llllll} \lambda' & \text{et} & n' & \text{de} & o & \text{à} & +\infty, \\ & & n & \text{de} & -\infty & \text{à} & +\infty. \end{array}$$

IV. — *Forme d'un terme quelconque du développement de* $\frac{rr's}{r'^3}$.

Réunissons les deux formules trouvées aux sections II et III, nous aurons le terme suivant, comme formule générale :

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} \{ o[\mathrm{G}_n(o, n')_{n'+1+\lambda'} \cos(n\mathrm{T} + n'\mathrm{T}' + \omega) \\ &\qquad + \mathrm{H}_n(o, n')_{n'-1-\lambda'} \cos(n\mathrm{T} + n'\mathrm{T}' - \omega)] \\ &\qquad + \nu[\mathrm{G}_n(o, n')_{n'+1+\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' + \Omega) \\ &\qquad + \mathrm{H}_n(o, n')_{n'-1-\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' - \Omega)] \}. \end{aligned} \right.$$

Ce terme général se compose de quatre parties; toutes choses égales d'ailleurs, les deux dernières, qui renferment ν en facteur, sont d'un ordre supérieur de deux unités à l'ordre des deux premières.

Chacune de ces quatre parties fournit une série indéfinie de termes dans le développement de la fonction $\frac{rr's}{r'^3}$. Ces séries sont indépendantes, et il conviendra de les développer séparément.

Remarque I. — On ne peut pas supposer $n' = o$, car on voit que les quatre transcendantes $(o, n')_i$ s'annulent dans cette hypothèse.

Remarque II. — On ne peut pas, *a fortiori*, supposer $n = 0$, $n' = 0$ à la fois; donc cette partie de la fonction perturbatrice ne fournit rien à la partie *séculaire* de R.

Remarque III. — Si l'on voulait, on pourrait décomposer o en deux parties, l'une de l'ordre zéro, l'autre du second; mais pour la symétrie des calculs, la formule ci-dessus est préférable.

Remarque IV. — Il est facile de faire voir que l'ordre d'un terme est au moins égal à l'argument $n + n'$ pris en valeur absolue, et que s'il le surpasse, c'est toujours d'un nombre pair. Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce théorème; elle est facile et analogue à celle que nous avons donnée pour la première partie de la fonction perturbatrice.

Remarque V. — Il est facile de voir que les termes de R qui viennent de $\frac{rr'^5}{r'^3}$ peuvent se déduire de la formule générale de ceux qui viennent de $\frac{1}{\rho}$; mais il est préférable, pour la symétrie des calculs, de les tirer directement des formules que nous venons de développer. Ce procédé a d'ailleurs l'avantage de montrer l'influence de chacune des parties de la fonction perturbatrice, dans le calcul d'une inégalité déterminée.

Sur la sommation de quelques séries, et sur quelques intégrales définies nouvelles;

PAR J. GRAINDORGE,
Docteur ès sciences, Répétiteur à l'Université de Liége.

---

1. Soit à trouver la somme de la série

$$s = \frac{\sin^2\varphi}{1^4} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^4} + \cdots.$$

En prenant la dérivée par rapport à φ, on a

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \frac{\sin 6\varphi}{3^3} + \cdots.$$

Or

$$\sin\varphi' + \frac{\sin 2\varphi'}{2^3} + \frac{\sin 3\varphi'}{3^3} + \cdots = \frac{1}{12}\varphi'(\pi - \varphi')(2\pi - \varphi');$$

donc

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{3}\varphi(\pi - 2\varphi)(\pi - \varphi).$$

Intégrant et observant que $s = 0$ pour $\varphi = 0$, on a

$$s = \frac{\pi^2\varphi^2}{6} - \frac{\pi^2\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^4}{6},$$

puis

$$(1) \qquad \frac{\sin^2\varphi}{1^4} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^4} + \cdots = \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2.$$

Si, dans cette formule, nous remplaçons φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$, il vient

$$(2) \qquad \frac{\cos^2\varphi}{1^4} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^4} + \frac{\sin^2 4\varphi}{4^4} + \cdots = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi^2}{4} - \varphi^2\right)^2.$$

En retranchant la formule (1) de la formule (2), on trouve

$$\frac{\cos 2\varphi}{1^4} + \frac{\cos 6\varphi}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi\varphi^2}{12}(3\pi - 4\varphi),$$

et, en remplaçant 2φ par φ,

$$(3) \qquad \frac{\cos\varphi}{1^4} + \frac{\cos 3\varphi}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi\varphi^2}{48}(3\pi - 2\varphi).$$

Cette dernière donne, en remplaçant φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

$$(4) \qquad \frac{\sin\varphi}{1^4} - \frac{\sin 3\varphi}{3^4} + \frac{\sin 5\varphi}{5^4} - \cdots = \frac{\pi\varphi}{96}(3\pi^2 - 4\varphi^2).$$

Ces formules subsistent pour toutes les valeurs de φ comprises entre o et π; les trois dernières sont en défaut pour $\varphi = \pi$.

2. La même méthode, appliquée à la série

$$u = \frac{\cos^2\varphi}{1^4} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^4} + \cdots,$$

donne

$$\frac{du}{d\varphi} = \pi\varphi^2 - \frac{\pi^2\varphi}{3} - \frac{2\varphi^3}{3};$$

d'où

$$u = C + \frac{\pi\varphi^3}{3} - \frac{\pi^2\varphi^2}{6} - \frac{\varphi^4}{6} = C - \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2.$$

La constante se détermine en faisant $\varphi = 0$:

$$C = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Par conséquent,

$$(5) \qquad \frac{\cos^2\varphi}{1^4} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2 \text{ [*]}.$$

En remplaçant φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$, on obtient

$$(6) \qquad \frac{\sin^2\varphi}{1^4} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{1440} - \frac{\varphi^2(2\varphi^2 - \pi^2)}{12}.$$

Ces deux séries subsistent pour toutes les valeurs de φ comprises entre 0 et π. La formule (6) est en défaut pour $\varphi = \pi$.

5. En faisant les mêmes calculs sur la série

$$v = \frac{\sin^3\varphi}{1^3} + \frac{\sin^3 2\varphi}{2^3} + \frac{\sin^3 3\varphi}{3^3} + \cdots,$$

on trouve

$$\frac{2}{3}\frac{dv}{d\varphi} = \frac{2\sin^2\varphi\cos\varphi}{1^2} + \frac{2\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi}{2^2} + \cdots,$$

$$\frac{2}{3}\frac{dv}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi\sin 2\varphi}{1^2} + \frac{\sin 2\varphi\sin 4\varphi}{2^2} + \cdots;$$

par suite

$$\frac{4}{3}\frac{dv}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1^2} + \frac{\cos 2\varphi}{2^2} + \frac{\cos 3\varphi}{3^2} + \cdots - \left(\frac{\cos 3\varphi}{1^2} + \frac{\cos 6\varphi}{2^2} + \cdots\right),$$

---

[*] Cette série peut d'ailleurs se déduire de la formule (1) retranchée de

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots.$$

d'où

$$\frac{4}{3}\frac{dv}{d\varphi} = \pi\varphi - 2\varphi^2.$$

Intégrant, on a

$$v = \frac{\varphi^2}{8}(3\pi - 4\varphi).$$

Donc

$$(7) \qquad \frac{\sin^3\varphi}{1^3} + \frac{\sin^3 2\varphi}{2^3} + \cdots = \frac{\varphi^2}{8}(3\pi - 4\varphi).$$

Cette formule a lieu pour les valeurs de φ comprises entre o et π; elle est en défaut pour $\varphi = \pi$.

4. La même méthode, appliquée à la série

$$z = \frac{\sin^4\varphi}{1^4} + \frac{\sin^4 2\varphi}{2^4} + \cdots,$$

donne facilement

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi(\cos\varphi - \cos 3\varphi)}{1^3} + \frac{\sin 2\varphi(\cos 2\varphi - \cos 6\varphi)}{2^3} + \cdots,$$

ou bien

$$2\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \cdots - \left(\frac{\sin 4\varphi - \sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 8\varphi - \sin 4\varphi}{2^3} + \cdots\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \cdots\right) - \left(\frac{\sin 4\varphi}{1^3} + \frac{\sin 8\varphi}{2^3} + \cdots\right);$$

en vertu de la formule citée, et après quelques réductions, on a

$$\frac{dz}{d\varphi} = \pi\varphi^2 - 2\varphi^3,$$

ce qui donne par l'intégration

$$(8) \qquad z = \frac{\sin^4\varphi}{1^4} + \frac{\sin^4 2\varphi}{2^4} + \cdots = \frac{\pi\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^4}{2}.$$

Cette formule subsiste pour les valeurs de φ depuis o jusqu'à π, excepté pour $\varphi = \pi$.

5. On peut de la même manière trouver la somme

$$w = \frac{\cos^4\varphi}{1^4} + \frac{\cos^4 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^4 3\varphi}{3^4} + \ldots.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\varphi} &= -\frac{2\cos^2\varphi\sin 2\varphi}{1^3} - \frac{2\cos^2 2\varphi\sin 4\varphi}{2^3} - \ldots \\ &= -\frac{2\sin 2\varphi}{1^3}(1-\sin^2\varphi) - \frac{2\sin 4\varphi}{2^3}(1-\sin^2 2\varphi) - \ldots \\ &= -2\left(\frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \ldots\right) + \left(\frac{2\sin^2\varphi\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{2\sin^2 2\varphi\sin 4\varphi}{2^3} + \ldots\right);\end{aligned}$$

et, par suite, d'après les formules ci-dessus,

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{2}{3}\varphi(\pi-2\varphi)(\pi-\varphi) + \pi\varphi^2 - 2\varphi^3 = 3\pi\varphi^2 - \frac{10\varphi^3}{3} - \frac{2\pi^2\varphi}{3}.$$

En intégrant, on trouve

$$w = C + \pi\varphi^3 - \frac{5}{6}\varphi^4 - \frac{\pi^2\varphi^2}{3}.$$

La constante se détermine en faisant $\varphi = 0$, ce qui donne

$$C = \frac{\pi^4}{90}.$$

Par conséquent,

$$(9) \qquad \frac{\cos^4\varphi}{1^4} + \frac{\cos^4 2\varphi}{2^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90} + \pi\varphi^3 - \frac{5}{6}\varphi^4 - \frac{\pi^2\varphi^2}{3}.$$

Cette formule est vraie pour les valeurs de φ comprises entre o et π; elle est en défaut pour $\varphi = \pi$.

6. On trouve, par le même procédé,

$$(10)\qquad \gamma = \frac{\sin^2\varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^2} + \ldots = \frac{\pi\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{2},$$

$$(11)\qquad \gamma_1 = \frac{\sin^2\varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^2} + \ldots = \frac{\pi}{4}\varphi,$$

$$(12)\qquad \gamma_2 = \frac{\cos^2\varphi}{1^2} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\varphi}{2}(\pi - \varphi),$$

$$(13)\qquad \gamma_3 = \frac{\cos^2\varphi}{1^2} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^2} + \ldots = \frac{\pi}{8}(\pi - 2\varphi).$$

Quoique nous ayons vainement cherché ces quatre séries dans différents Traités, nous croyons cependant qu'elles ne sont pas nouvelles. Elles ont lieu pour les valeurs de φ comprises entre o et π : les formules (11) et (13) sont en défaut pour $\varphi = \pi$.

7. Ces résultats étant connus, nous aurons

$$\frac{1}{4x}\, l.\, \frac{1 - 2x\cos 2\varphi + x^2}{(1-x)^2} = \sin^2\varphi + \frac{x}{2}\sin^2 2\varphi + \frac{x^2}{3}\sin^2 3\varphi + \ldots;$$

d'où, en intégrant entre les limites o et 1,

$$\frac{1}{4}\int_0^1 l.\, \frac{1 - 2x\cos 2\varphi + x^2}{(1-x)^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\sin^2\varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^2} + \ldots = \frac{\varphi(\pi - \varphi)}{2},$$

ou, en remplaçant 2φ par φ,

$$(14)\qquad \int_0^1 l.\, \frac{1 - 2x\cos\varphi + x^2}{(1-x)^2}\,\frac{dx}{x} = \varphi\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right).$$

8. La relation

$$-\frac{1}{4}\, l.\, [(1 - 2x\cos 2\varphi + x^2)(1-x)^2] = x\cos^2\varphi + \frac{x^2}{2}\cos^2 2\varphi + \ldots$$

nous donne de la même manière

$$-\frac{1}{4}\int_0^1 l.\,[(1-2x\cos 2\varphi+x^2)(1-x)^2]\frac{dx}{x}=\frac{\cos^2\varphi}{1^2}+\frac{\cos^2 2\varphi}{2^2}+\ldots;$$

d'où l'on déduit, en vertu de (12) et en remplaçant 2φ par φ,

$$(15)\qquad \int_0^1 l.\,[(1-2x\cos\varphi+x^2)(1-x)^2]\frac{dx}{x}=\varphi\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{2}{3}\pi^2.$$

En faisant $\varphi=0$, on retrouve l'intégrale connue

$$\int_0^1 l.\,(1-x)\frac{dx}{x}=-\frac{\pi^2}{6}.$$

9. Ajoutant les intégrales (14) et (15), on a

$$\int_0^1 l.(1-2x\cos\varphi+x^2)^2\frac{dx}{x}=2\varphi\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{2}{3}\pi^2,$$

d'où

$$(16)\qquad \int_0^1 l.\,(1-2x\cos\varphi+x^2)\frac{dx}{x}=\varphi\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{1}{3}\pi^2.$$

10. De la même manière, la relation

$$\frac{1}{8}l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1-2x\cos 2\varphi+x^2}{1+2x\cos 2\varphi+x^2}\right]=x\sin^2\varphi+\frac{x^3}{3}\sin^2 3\varphi+\ldots$$

conduit à celle-ci :

$$\frac{1}{8}\int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1-2x\cos 2\varphi+x^2}{1+2x\cos 2\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x}=\frac{\sin^2\varphi}{1^2}+\frac{\sin^2 3\varphi}{3^2}+\ldots;$$

d'où, à cause de la formule (11),

$$\int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1-2x\cos 2\varphi+x^2}{1+2x\cos 2\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x}=2\pi\varphi,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(17)\qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1-2x\cos\varphi+x^2}{1+2x\cos\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x}=\pi\varphi.$$

11. Si, dans cette formule, nous faisons $\varphi=\frac{\pi}{4}$, il vient

$$(18)\qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right]\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{4}.$$

12. La combinaison de la formule

$$\frac{1}{8}l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1+2x\cos 2\varphi+x^2}{1-2x\cos 2\varphi+x^2}\right]=x\cos^2\varphi+\frac{x^3}{3}\cos^2 3\varphi+\ldots$$

avec la formule (13) nous donne

$$\int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1+2x\cos 2\varphi+x^2}{1-2x\cos 2\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x}=\pi(\pi-2\varphi),$$

ou bien

$$(19)\qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1+2x\cos\varphi+x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x}=\pi(\pi-\varphi).$$

13. Pour $\varphi=0$, cette dernière égalité devient

$$(20)\qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{4},$$

formule connue; et, pour $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

$$(21)\qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right]\frac{dx}{x}=\frac{3\pi^2}{4}.$$

14. En combinant les formules (19) et (20), on trouve

$$(22)\qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1+2x\cos\varphi+x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2}\right)\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{2}-\pi\varphi,$$

que l'on peut aussi déduire de l'intégrale (17).

15. Si nous ajoutons les formules (15) et (19), nous aurons

$$(23)\qquad \int_0^1 l.\left[(1+x)^2(1+2x\cos\varphi+x^2)\right]\frac{dx}{x}=\frac{1}{3}\pi^2-\frac{\varphi^2}{2};$$

ce qui donne, pour $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

$$(24)\qquad \int_0^1 l.(1+x)^2\left[(1+x\sqrt{2}+x^2)\right]\frac{dx}{x}=\frac{29\pi^2}{96}.$$

16. En remplaçant φ par $\frac{\pi}{4}$ dans (22), on trouve

$$(25)\qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{4},$$

et, en retranchant l'intégrale (20),

$$(26)\qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1-x}{1+x}\,\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)\frac{dx}{x}=0.$$

17. Ajoutant (16) et (22), on a

$$(27)\qquad \int_0^1 l.(1+2x\cos\varphi+x^2)\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\varphi^2}{2},$$

et, pour $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

$$(28)\qquad \int_0^1 l.(1+x\sqrt{2}+x^2)\frac{dx}{x}=\frac{13\pi^2}{96}.$$

18. A cause de

$$\frac{1}{4}\,l.\left(\frac{1+2x\sin\varphi+x^2}{1-2x\sin\varphi+x^2}\right)=x\sin\varphi-\frac{x^3}{3}\sin 3\varphi+\ldots$$

et de

$$\frac{\sin\varphi}{1^2}-\frac{\sin 3\varphi}{3^2}+\frac{\sin 5\varphi}{5^2}-\ldots=\frac{\pi\varphi}{4},$$

on a

$$(29)\qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1+2x\sin\varphi+x^2}{1-2x\sin\varphi+x^2}\right)\frac{dx}{x}=\pi\varphi,$$

résultat que l'on peut déduire de (22) en changeant φ en $\frac{\pi}{2}-\varphi$.

19. Enfin, si l'on retranche membre à membre les relations (17), (29), on obtient

$$(30)\qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1-2x\cos\varphi+x^2}{1+2x\cos\varphi+x^2}\,\frac{1-2x\sin\varphi+x^2}{1+2x\sin\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x}=0.$$

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville

PAR M. BESGE.

L'équation différentielle

$$(1)\qquad y\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2py^2,$$

où p est une fonction donnée de la variable indépendante x, peut être ramenée à une forme beaucoup plus simple.

Pour essayer de l'intégrer par la méthode ordinaire, on doit poser d'abord

$$y = e^{\int t\,dx},$$

ce qui donne, pour déterminer la nouvelle inconnue t, l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = \frac{1}{2}t^2 + 2p,$$

ou bien

$$\frac{dt}{dx} + \frac{1}{2}t^2 = 2p.$$

Or, en faisant

$$t = 2\sigma,$$

et divisant par 2, cela donne

$$\frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 = p.$$

C'est précisément l'équation à laquelle on serait conduit si, partant de l'équation linéaire

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = pu,$$

on posait

$$u = e^{\int \sigma\, dx}.$$

Réciproquement donc, si vous intégrez l'équation (2), vous en conclurez la valeur de σ, qui est égale à

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx},$$

d'où celle de t, qui est le double, puis enfin celle de y qu'on se proposait d'obtenir, et votre problème sera ainsi résolu.

Comme exemple, on peut prendre toute fonction p pour laquelle l'intégrale complète de l'équation (2) soit connue, et l'on sait qu'il suffit d'avoir une seule intégrale particulière de l'équation (2) pour former cette intégrale complète. Le cas de

$$p = gx^m$$

est un des plus simples qu'on puisse choisir. Il répond à l'équation connue de Riccati, ou plutôt l'équation

$$\frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 = p$$

n'est alors que l'équation même de Riccati.

Je crois inutile d'entrer ici dans les détails du calcul.

Post-scriptum. Je remarque à l'instant qu'en différentiant l'équation (1) on obtient ce résultat remarquable

$$y\frac{d^3y}{dx^3} = 4py\frac{dy}{dx} + 2p'y^2,$$

en posant pour abréger

$$\frac{dp}{dx} = p'.$$

En divisant donc par y, on aura

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 4p\frac{dy}{dx} + 2p'y,$$

équation linéaire dont l'intégrale dépend aussi, par conséquent, de celle de l'équation (2). Mais je crois que cela ne vous surprendra pas; car je crois me souvenir que vous avez, dans un de vos anciens Mémoires, rencontré cette même équation (3) en considérant le produit de deux intégrales particulières (égales ou inégales) de l'équation (2), de sorte que, si l'intégrale de l'équation (2) est, avec deux constantes arbitraires a, b,

$$u = au_1 + bu_2,$$

l'intégrale de l'équation (3) sera

$$y = Au_1^2 + Bu_1u_2 + Cu_2^2,$$

A, B, C étant aussi trois constantes arbitraires. Il n'y a donc au fond rien de nouveau dans ma Lettre, que pourtant je ne supprime pas; vous en ferez ce que vous voudrez.

Note de M. Liouville. Il est très-certain que je me suis jadis occupé de l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 4p\frac{dy}{dx} + 2p'y,$$

et que j'ai fait connaître comment elle dépend de l'équation (2); mais il y a si longtemps de cela que, pour la plupart de nos lecteurs, la Lettre de M. Besge pourra ne pas être sans quelque intérêt. Je l'envoie donc à tout hasard à l'impression.

Sur quelques formules générales qui se rattachent à certaines formes quadratiques;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(PREMIER ARTICLE.)

Je me propose de faire connaître dans une série d'articles quelques formules générales, qui se rattachent à certaines formes quadratiques binaires, et dont je vais donner, dans ce premier article, un exemple très-simple et pourtant digne d'attention.

Soit m un entier impair donné. Posons, de toutes les manières possibles, d'une part

$$m = \alpha^2 + 3\beta^2, \tag{1}$$

α, β étant des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, négatifs ou zéro; puis, d'autre part,

$$4m = i^2 + 3i'^2, \tag{2}$$

i, i' désignant cette fois des entiers essentiellement impairs et positifs. Soit, d'ailleurs, $f(x, y)$ une fonction de deux variables x, y, paire tant par rapport à x que par rapport à y, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$f(-x, y) = f(x, -y) = f(-x, -y) = f(x, y).$$

Au moyen de cette fonction et des équations (1) et (2) nous pourrons former les deux sommes suivantes :

$$\Sigma f(\alpha + 3\beta, \alpha - \beta) \tag{A}$$

et

$$\Sigma f(i, i') \tag{B}$$

ou le signe Σ porte respectivement sur l'ensemble des solutions des équations (1) et (2). Cela posé, notre théorème consiste en ce que la première somme (A) est toujours double de la seconde (B), en sorte que l'on a

$$(1) \qquad \Sigma f(\alpha + 3\beta, \alpha - \beta) = 2\Sigma f(i, i').$$

Faisons, par exemple, $m = 1 = (\pm 1)^2 + 3.0^2$, ce qui donnera pour l'équation (1) deux groupes de solutions $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$, d'où, pour le premier membre de notre équation, la valeur

$$f(1, 1) + f(-1, -1),$$

ou simplement

$$2f(1, 1),$$

puisque la fonction f est paire. Il nous viendra d'autre part, dans ce cas,

$$4.1 = 1^2 + 3.1^2,$$

ce qui, comparé à l'équation (2), donnera ce seul système $i = 1$, $i' = 1$, et aussi $2f(1, 1)$ pour le second membre.

Soit ensuite $m = 3$. L'équation (1) deviendra alors

$$3 = 0^2 + 3.(\pm 1)^2,$$

d'où $\alpha = 0$, $\beta = 1$, et $\alpha = 0$, $\beta = -1$. Quant à l'équation (2), elle sera ici

$$4.3 = 3^2 + 3.1^2.$$

Et les deux membres de l'équation (I) seront, par conséquent,

$$f(3, -1) + f(-3, 1) \quad \text{et} \quad 2f(3, 1),$$

c'est-à-dire égaux entre eux.

Il est inutile d'essayer le nombre $m = 5$, pour lequel aucune de nos

équations n'a lieu. Passons donc à l'entier $m = 7$, pour lequel on a respectivement

$$7 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2$$

et

$$4 . 7 = 1^2 + 3 . 3^2 = 5^2 + 3 . 1^2 ;$$

on trouvera cette fois encore que l'équation (I) est vérifiée, et l'on aura toujours une telle vérification, si loin qu'on veuille aller.

SUR LA STATISTIQUE JUDICIAIRE;

PAR M. ERNEST LIOUVILLE.

(Extrait du Discours prononcé le 4 novembre 1872 à l'audience solennelle de rentrée de la Cour de Riom.)

La Statistique, si on la considère seulement comme étant la représentation, chez un peuple et à un moment donné, du chiffre de sa population, des ressources que le fisc peut en tirer, est pour ainsi dire aussi ancienne que le monde. Nous retrouvons, en effet, dans la Bible elle-même [*] l'énumération des familles composant la tribu de Lévi et le nombre des hommes en état de porter les armes dans les autres tribus d'Israël, recensés par Moïse peu de temps après la sortie d'Égypte. Le roi David, connaissance prise du nombre de ses sujets et des richesses dont il pouvait disposer [**], ne s'exposa-t-il pas, par le sentiment d'orgueil qu'il en conçut, aux sévères remontrances du prophète Gad? Et n'est-ce pas par suite de l'obéissance au décret bien connu de l'empereur Auguste que Jésus-Christ venait naître à Bethléem [***]?

Chez les Romains, dès Servius Tullius, la population était partagée en centuries, suivant la position de fortune des citoyens, et, à mesure que la puissance de Rome s'accrut, chaque nouvelle nation soumise fut imposée, d'après sa richesse connue ou le caractère de sa population, à fournir un contingent en hommes ou en argent. Des états étaient dressés à cet effet par les personnes les plus riches du pays ou, à leur défaut, par les vainqueurs eux-mêmes.

[*] *Les Nombres*, ch. I, II, III et IV.
[**] *Les Rois*, liv. II, ch. XXI. — *Les Paralipomènes*, liv. I, ch. XXIV.
[***] *Évangile selon saint Luc*, ch. II.

Au moyen âge, nous voyons ces pratiques de la vieille Rome survivre en quelque sorte à la destruction de sa puissance : de là les dénombrements exigés par les rois et les seigneurs féodaux, laïques et ecclésiastiques, qui servaient de base aux redevances que, sous des noms si divers, les vassaux étaient tenus de payer à leurs seigneurs.

Cette statistique, conçue dans un but étroit, sans comparaison avec le passé, sans prévision de l'avenir, n'est pas celle dont j'ai l'intention de vous parler aujourd'hui, bien que certains des documents recueillis par elle, et que l'injure du temps a respectés jusqu'ici, soient pour l'économiste et pour le penseur d'une réelle utilité.

La Statistique, telle que nous l'entendons de nos jours, a une tout autre portée. Dans le *temps*, elle compare un peuple à lui-même au point de vue de sa population, de son agriculture, de son industrie, de son commerce, aussi bien qu'à celui de son instruction et de sa moralité. Dans *l'espace*, elle compare la population, les ressources, la moralité des différents peuples qui couvrent la surface du globe, offrant ainsi à chacun d'eux, par l'étude qu'elle lui permet de faire sur lui-même et par la comparaison possible avec ses voisins, un ample et sérieux sujet de méditations.

Ce n'est que d'hier qu'est née la Statistique considérée à ce point de vue ; à la fin du XVIIe siècle, elle n'existait pas encore. C'est seulement à cette époque que la Grande-Bretagne cherchait à dresser régulièrement un relevé de son commerce extérieur. En France, grâce au mouvement économique qui commençait alors à s'emparer des esprits, les Vauban et, plus tard, les Duvillard, les Deparcieux, les Condorcet, les Laplace et les Lagrange cherchaient à tirer des éléments bien imparfaits dont ils pouvaient disposer d'utiles enseignements ; mais il manquait à ces intrépides chercheurs une base certaine : des documents consciencieux et complets.

Leurs travaux n'ont pas été cependant perdus, grâce à l'esprit d'analyse qui les distingue ; l'application raisonnable et raisonnée des Mathématiques à l'appréciation des faits intéressant l'humanité est en grande partie leur œuvre ; et c'est avec plaisir que je puis citer devant vous, comme un de leurs plus illustres précurseurs, puisque c'est à lui qu'appartient l'honneur d'avoir créé le Calcul des probabilités, un des immortels enfants de l'Auvergne : vous avez nommé Blaise Pascal.

Me permettrez-vous, Messieurs, de vous rappeler comment Pascal fut conduit à cette découverte, qui doit être à bon droit comptée au nombre de celles qui ont fait le plus de gloire au XVIIe siècle et à la France?

Le chevalier de Méré, plus célèbre par son amour du jeu que par ses talents, proposa les deux problèmes suivants à Pascal : « En combien de coups peut-on amener sonnez avec deux dés? — Dans quelle proportion deux joueurs qui consentent à se séparer sans achever la partie doivent-ils se partager l'enjeu? » Non-seulement Pascal a résolu ces deux problèmes, mais il nous a laissé de plus un écrit pour déterminer en général les *partis* qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties, et il a encore traité de la même matière dans ses Lettres à Fermat. Telle fut l'origine du Calcul des probabilités.

Bossut, dans son Discours sur la vie et les ouvrages de Pascal, nous raconte que le chevalier de Méré, après avoir résolu, avec le secours de la logique naturelle, quelques cas particuliers et faciles de ces problèmes, incapable d'apprécier les recherches de Pascal, mais enorgueilli d'y avoir donné occasion, se crut en droit de les rabaisser; et, poussant à l'excès la liberté que quelques gens du monde s'arrogent de tout juger, de tout improuver, sans avoir rien approfondi, il osa écrire à Pascal que *les démonstrations de la Géométrie sont le plus souvent fausses;* qu'elles empêchent d'entrer *dans des connaissances plus hautes qui ne trompent jamais;* qu'elles font perdre dans le monde l'avantage *de remarquer à la mine et à l'air des personnes qu'on voit quantité de choses qui peuvent beaucoup servir.*

Cette lettre nous permet de supposer que le chevalier de Méré regardait l'art de saisir les faiblesses des hommes et d'en profiter comme la suprême science; mais si les découvertes de Pascal furent ainsi accueillies par celui qui les avait provoquées, elles ne le furent pas de même par les véritables savants. Tous les grands géomètres du temps y applaudirent, et à leur tête Fermat, cette lumière du Parlement de Toulouse cette illustration de la Science française.

De nos jours, les tableaux statistiques se sont multipliés presqu'à l'infini : richesses, produits du sol ou de l'industrie, mouvement commercial, sont recensés et présentés à nos yeux de manière à nous offrir de précieux renseignements au point de vue des forces vives du pays.

Les documents relatifs à l'instruction publique nous font connaître le nombre et la diversité de nos établissements scolaires; nous savons combien d'élèves les fréquentent, le degré d'instruction auquel ils sont parvenus; d'autres documents nous apprennent s'ils ont conservé les notions qui leur ont été inculquées. C'est ainsi que lors du tirage au sort, au moment de la célébration du mariage par l'officier de l'état civil, dans bien d'autres circonstances de la vie qu'il serait trop long d'énumérer ici et que vous connaissez mieux que moi, il est facile de s'assurer si le germe de ces connaissances a fructifié ou s'est perdu.

Vous parlerai-je d'une autre branche de la Statistique moderne, celle qui concerne le mouvement de la population, la durée de la vie moyenne, le nombre des mariages, le rapport des naissances au nombre de ces mariages, et qui nous montre la population tendant toujours à s'agglomérer autour des centres industriels, sans que vous ne reconnaissiez, comme moi, un des phénomènes les plus curieux à constater, mais en même temps des plus difficiles à sainement apprécier, non-seulement au point de vue moral, mais encore au point de vue des intérêts matériels bien entendus de l'humanité?

Quelque attrait que puisse offrir une pareille étude, je ne puis cependant, Messieurs, entreprendre de la traiter ici; mes forces ne me le permettraient pas, et ce serait beaucoup trop exiger de votre bienveillante attention; je me bornerai donc à vous parler un instant de la Statistique judiciaire, qui n'est pas l'unique document que le moraliste doive consulter avec fruit, mais sans lequel il courrait le plus grand risque de s'égarer dans ses déductions.

Tant que la pensée n'était pas venue de recueillir les documents propres à dresser des tables statistiques de la criminalité, il était véritablement difficile, sinon tout à fait impossible, de connaître la bonté relative des lois par l'appréciation de leurs effets.

Le premier essai sérieux de Statistique criminelle ne remonte qu'à l'an IX [*]. Les commissaires du gouvernement près les tribunaux criminels durent, aux termes d'une circulaire du 3 nivôse, adresser au ministère des états sommaires destinés à fournir les éléments de rapports généraux sur l'ensemble de l'administration de la justice; les

[*] Sous le ministère d'Abrial.

articles 600 et 601 du Code d'Instruction criminelle consacrèrent, en les prescrivant, l'envoi de ces états.

Ce n'est pourtant que de 1825 que date réellement la Statistique judiciaire en France. Publiés régulièrement, s'améliorant d'année en année, ces documents d'une haute utilité permettent de porter un jugement plus sain sur l'ensemble de nos Codes et d'apprécier ce qu'ont pu avoir d'utile les modifications ou transformations apportées depuis lors à nos lois.

Ce n'est pas à vous, Messieurs, que j'ai besoin de faire connaître les détails de ces intéressants volumes auxquels vous avez tous collaboré, et que l'Institut couronnait, en 1856, comme œuvre éminemment remarquable entre toutes; mais n'est-il pas bon de répondre à certaines attaques, de faire disparaître, s'il se peut, des préjugés trop nombreux; de faire aimer, en montrant quelle est sa réelle importance, un travail sans cela bien ingrat?

Il n'est que trop d'esprits impatients qui veulent récolter avant même d'avoir semé; si d'un labeur pénible surtout ils n'ont pas immédiatement retiré les avantages sur lesquels ils avaient compté, que de mépris et de dédain ne montrent-ils point pour le sol que le peu de durée de leurs efforts et leur trop prompt découragement ont seuls laissé infécond! Telle est l'origine des plus nombreuses et des plus acerbes critiques dont les travaux que je crois devoir défendre sont trop souvent l'objet aujourd'hui.

Que de temps perdu! pensent ou disent ces hommes superficiels. A quoi bon toutes ces notices, tous ces cadres à remplir? Notre expérience d'hier n'est-elle pas suffisante pour nous mettre à même de satisfaire largement à toutes nos obligations?

Nous nous bornerons, pour toute réponse, à leur rappeler ces sages paroles de Laplace [*], qui sont d'une application journalière et que l'on ne saurait trop méditer :

« L'esprit a ses illusions, comme le sens de la vue; et de même que le toucher corrige celles-ci, la réflexion et le calcul corrigent les premières. La probabilité fondée sur une expérience journalière, ou exagérée par la crainte et l'espérance, nous frappe plus qu'une probabilité

---

[*] Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 4e édition, p. 194.

supérieure, mais qui n'est qu'un simple résultat du calcul. Ainsi nous ne craignons point, pour de faibles avantages, d'exposer notre vie à des dangers beaucoup moins invraisemblables que la sortie d'un quine à la loterie de France [*]; et cependant personne ne voudrait se procurer les mêmes avantages, avec la certitude de perdre la vie, si ce quine arrivait.

» Nos passions, nos préjugés et les opinions dominantes, en exagérant les probabilités qui leur sont favorables, et en atténuant les probabilités contraires, sont des sources abondantes d'illusions dangereuses.

» Les maux présents et la cause qui les fait naître nous affectent beaucoup plus que le souvenir des maux produits par la cause contraire : ils nous empêchent d'apprécier avec justesse les inconvénients des uns et des autres et la probabilité des moyens propres à nous en préserver. C'est ce qui porte alternativement vers le despotisme et vers l'anarchie les peuples sortis de l'état de repos, dans lequel ils ne rentrent jamais qu'après de longues et cruelles agitations.

» Cette impression vive que nous recevons de la présence des événements, et qui nous laisse à peine remarquer les événements contraires observés par d'autres, est une cause principale d'erreur dont on ne peut trop se garantir. »

Arrivons à des objections plus sérieuses, opposées à ce que l'on appelle le *stérile envahissement* de la Statistique.

Quel fruit peut-on tirer, en effet, disent nos contradicteurs, de renseignements qui ne concordent pas toujours entre eux? Sans sortir de France, n'y a-t-il pas pour certains crimes, pour certains délits, inégalité flagrante dans la répression? Cette inégalité ne tient-elle pas aux mœurs des diverses contrées, au nombre des agents chargés de la constatation des faits qui sont de nature à porter atteinte au bon ordre social, à leur instruction, à leur activité? Comment, dès lors, tirer des conclusions comparables de données aussi disparates? Comment surtout espérer jamais réussir à comparer utilement l'état d'un pays, quel

---

[*] La loterie a été supprimée depuis longtemps, au grand avantage de la morale publique. — La probabilité de la sortie du *quine*, dont parle ici Laplace, était de 1 sur 43,949,268 (E. L.).

qu'il soit, à celui d'un autre pays? Ne rencontrera-t-on pas dans cette recherche, non-seulement les difficultés déjà signalées, mais encore celles qui ne peuvent manquer de résulter de la différence même des législations? Ce qui, en effet, est réputé crime chez certains peuples, chez d'autres n'est considéré que comme simple délit, ou même n'est l'objet d'aucune répression : *Vérité en deçà, erreur au delà!* ainsi que l'a proclamé Pascal.

A l'objection tirée de ce que les documents statistiques n'ont pas encore permis de trouver la meilleure solution de tous les problèmes dont le moraliste et le jurisconsulte s'occupent chaque jour, nous répondrons que rien n'est fécond que dans un sol depuis longtemps travaillé, et que rien n'est durable s'il n'est fondé avec le temps. Un demi-siècle de patientes observations ne renferme pas un espace de temps assez considérable, n'a pas permis de constater et de coordonner assez de faits particuliers, pour qu'on ait le droit de se déclarer déçu dans ses espérances et de proscrire comme inutile un genre de recherches qui n'a pu encore produire tous ses fruits.

On peut dire cependant, sans manquer à la vérité, que le dur labeur n'a pas toujours été sans récompense; que bien d'utiles réformes opérées dans nos lois ont été suggérées par l'examen sérieux des comptes rendus judiciaires, et que l'expérience n'a pas tardé à justifier, au delà de toute prévision, l'utilité des réformes opérées. Ai-je besoin, Messieurs, de rappeler l'extension progressive donnée aux attributions des juges de paix, les réformes apportées aux poursuites de saisies immobilières, aux procédures d'ordre? Et ne voyons-nous pas des réformes, plus importantes peut-être, se préparer aujourd'hui pour arriver aux règlements, plus prompts et moins onéreux pour les parties intéressées, des ventes judiciaires, des faillites et de tant d'autres procédures dont la Statistique a seule fait reconnaître les abus invétérés?

Le plus fort de tous les arguments opposés jusqu'ici à l'utilité pratique des recherches qui nous occupent est le suivant : l'homme, ou du moins la moralité de l'homme échappe à tous les calculs; il est impossible, d'après la seule inspection de ce qui s'est passé hier, de pouvoir prédire ou même présager ce qui arrivera demain; on n'y est point parvenu, on n'y parviendra peut-être jamais dans l'ordre des

Sciences météorologiques, à plus forte raison ne peut-on espérer un résultat véritablement utile de tant de travaux où, à toutes les difficultés que nous venons de rappeler, se joignent, au moment où l'on peut le moins s'en douter, toutes celles qui peuvent naître du libre arbitre de la volonté humaine.

Comment soutenir, disent nos contradicteurs, que demain, qu'après-demain toutes les conclusions que vous avez cru pouvoir tirer de vos chiffres ne seront pas mises à néant par le seul exercice de ma libre volonté? Méchant hier, ne puis-je me montrer bon demain? belliqueux aujourd'hui, lâche dans l'avenir? Que devient alors votre prétendue science?

Notre réponse ne sera pas difficile. La Statistique est plus modeste que ne la représentent ses adversaires; elle reconnaît que quelques tableaux formés consciencieusement, se reproduisant chaque année, ne promettent pas à eux seuls la découverte de la panacée qui permettra de guérir toutes nos plaies morales, ou tout au moins de leur porter un réel adoucissement.

Mais, de ce que l'on ne peut tout faire, est-il permis de se déclarer impuissant? La Météorologie nous a fait connaître la différence des saisons; irons-nous dire qu'il n'est pas établi d'une façon irréfragable que la température est plus élevée, dans nos climats, au mois de juillet qu'au mois de janvier, parce qu'il est impossible de présager avec certitude si la pluie ou le beau temps constaté ce matin se reproduira dans huit jours? Ce serait nier l'évidence!

Ce serait la nier aussi que de ne pas reconnaître que les bienfaits de l'éducation et la bonne direction morale peuvent influer sur la conduite future des hommes; que telle ou telle mesure prise à propos et conseillée par les éléments observés et recueillis avec soin pourra, sinon arrêter tout d'un coup une violente crise sociale, du moins la rendre moins dangereuse dans ce qu'elle aura d'inévitable.

Qu'ils savaient mieux priser la science des faits ces philosophes de la Grèce, les Pythagore, les Thalès de Milet, les Aristote, qui se condamnaient à de lointains et pénibles voyages pour observer à travers tous les périls les mœurs des hommes de leur temps! Quand Aristote recevait de son élève Alexandre les produits les plus curieux des vastes et lointaines contrées que parcourait ce conquérant, n'y voyait-il pas

la plus haute et la plus désirable des récompenses pour les soins qu'il lui avait prodigués dans sa jeunesse?

Ah! si le philosophe de Stagyre avait pu disposer de documents pareils à ceux que la Statistique recueille aujourd'hui parmi nous, quel parti n'en aurait pas tiré cet admirable logicien!

Ce n'est pas lui qu'eussent effrayé les difficultés qu'offre la coordination de données disparates : il eût su n'accorder à chacun des documents recueillis que le degré de confiance qu'il méritait, et son nom serait signalé, à un titre de plus, à l'admiration et à la reconnaissance de la postérité.

Quels regrets ne devons-nous pas éprouver, lorsque nous sommes obligés de reconnaître qu'il n'a manqué à ce peuple grec, si poétique et si pratique à la fois, que le moyen ou le temps d'appuyer sur les faits ses admirables productions. Qu'un Platon, qu'un Euclide, qu'un Archimède, qu'un Hipparque auraient su utiliser des travaux statistiques tels que les nôtres! Hipparque découvrait la *précession des équinoxes* en comparant le résultat de ses observations aux observations relativement informes des Chaldéens; quelle leçon et quel exemple!

Un des grands avantages que nous possédons sur ces philosophes de l'antiquité, dont le génie égale au moins celui de nos plus grands hommes, c'est la connaissance plus approfondie des faits, le progrès des Sciences mathématiques et l'heureuse application que l'on en fait chaque jour aux données de l'expérience.

Nous savons maintenant, à n'en pouvoir douter, que si tous les phénomènes qui se déroulent devant nous ont une cause, leurs développements sont accompagnés ou suivis d'effets inévitablement rattachés à cette cause. Sans abandonner la méthode si féconde et toujours si sûre qui consiste à déduire de certains principes, admis comme étant l'expression même de la vérité, les conséquences logiques qui doivent en découler, nous aimons à contrôler ces vérités elles-mêmes par les résultats d'une expérience quotidienne, induisant des faits constatés la cause qui a pu les produire.

Vous n'ignorez pas, Messieurs, que c'est en procédant ainsi que Newton, s'appuyant sur les travaux de Kepler, découvrait la loi de

l'attraction universelle qui, née de l'appréciation saine des faits, est tous les jours confirmée par les faits eux-mêmes.

C'est l'application de cette méthode, à laquelle Bacon a eu l'honneur d'attacher son nom, qui distingue nos essais de Statistique judiciaire. Les instigateurs de ces travaux et leurs persévérants successeurs n'ont jamais eu la pensée que les colonnes de chiffres qu'ils offrent chaque année à l'appréciation éclairée des économistes, des hommes d'État et des penseurs, pouvaient dispenser de chercher ailleurs les véritables principes sur lesquels repose la morale. Ils n'ont jamais entendu faire obstacle aux vérités de la foi ou de la conscience; leur but plus modeste, et par là même plus utile, a été seulement de donner à ces vérités l'appui et le contrôle des faits, et, s'il m'est permis de m'exprimer ainsi, d'assurer par l'expérience du passé la sage direction des tentatives à faire pour améliorer l'avenir. Écoutez ce que dit à ce sujet M. Cournot en terminant son remarquable Mémoire *sur les applications du calcul des chances à la Statistique judiciaire* [*] :

« Bien loin que les dédains de certains légistes pour le calcul des chances judiciaires soient fondés, le point de vue sous lequel le législateur envisage l'organisation des tribunaux est au fond le même que celui du géomètre. Le législateur ne se préoccupe que des résultats moyens et généraux du système qu'il institue, et le géomètre sait que ses formules n'ont de valeur qu'autant qu'elles s'appliquent à de grands nombres, sans qu'elles puissent avoir de prise sur un cas particulier. Le législateur ne peut interroger que la Statistique judiciaire, s'il veut trouver la confirmation authentique de ses prévisions; sans la Statistique les formules du géomètre resteraient stériles, ou du moins on n'en pourrait tirer que quelques propositions générales et non des résultats numériques.

» Le législateur sait ou doit savoir que les institutions judiciaires ne préviendront jamais ces méprises fatales qui chargent l'innocence des apparences du crime; qu'elles n'empêcheront pas en matière civile ces erreurs de jurisprudence qui prennent leur source dans un préjugé dominant; que leur unique destination est de garantir un

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, par Joseph Liouville, 1re série, t. III, p. 334.

jugement conforme à celui de la majorité des hommes impartiaux et éclairés pour l'époque; d'offrir même en matière criminelle une garantie suffisante que le jugement de condamnation aurait l'assentiment d'une grande majorité; de restreindre l'influence des anomalies du sort sur la destinée de l'accusé. »

Excusez-moi, je vous prie, Messieurs, si je me suis laissé entraîner par le sujet. Il me reste bien peu de temps pour vous parler des résultats déjà obtenus au moyen de la Statistique judiciaire; vous me permettrez donc d'être bref sur ce point, et même de me renfermer dans le domaine de la Statistique criminelle, car il faudrait un volume pour énumérer seulement tous les intéressants problèmes dont la solution est en germe dans les précieux documents publiés par l'administration de la justice en France.

Un des plus heureux résultats que nous font connaître ces documents est assurément celui-ci : le nombre des accusations pour crimes a singulièrement diminué malgré l'accroissement notable de la population; de près de 9000 qu'il était en 1847, avec une population recensée de 35 millions et demi d'habitants, nous le voyons tomber en 1869 à moins de 3400 pour plus de 38 millions d'hommes; ce qui fait qu'en cette dernière année, en ayant égard à l'accroissement numérique de la population, le nombre proportionnel des crimes est trois fois moins grand. Ce chiffre témoigne assez d'une sérieuse amélioration, même en tenant compte des lois qui, dans l'intervalle séparant 1847 de 1869, ont cessé de faire considérer comme crimes certains faits qualifiés actuellement délits, et dès lors échappant à la compétence des cours d'assises.

Nous voyons, d'autre part, que le nombre des délits poursuivis devant la police correctionnelle s'est accru dans une proportion inverse, ce qui prouve que la recherche de ces délits et que leur répression est aujourd'hui beaucoup plus active et beaucoup plus sérieuse qu'autrefois; c'est, je crois, tout ce que l'on a le droit d'induire de la notable augmentation des faits délictueux déférés aux tribunaux. En conclure un abaissement du niveau moral me paraîtrait tout au moins téméraire.

Il ne faut pas oublier, en effet, que diverses lois ont singulièrement augmenté, depuis l'origine des comptes rendus statistiques, le nombre

des poursuites correctionnelles. Le Code forestier a précédé à peine la révolution de 1830; le délit d'infraction au ban de surveillance n'existait pas avant 1832; le colportage du gibier n'est puni que depuis 1844; la loi du 27 mars 1851 a réprimé les fraudes dans la vente des denrées alimentaires et autres. La loi sur la police des cafés et des cabarets, celle sur la police des chemins de fer, et tant d'autres, doivent être également mises en ligne de compte.

« Des actes jugés d'abord indifférents, dit fort judicieusement le regretté Président de Chambre de cette Cour, M. Enjubault [*], deviennent des causes de perturbation ou de désordre. Ce qui avait été permis ou toléré sera désormais défendu, et tombera sous le coup d'une pénalité. Il est des circonstances où il convient d'appliquer avec plus de sévérité les lois de police, de surveiller plus attentivement le débit des denrées, le commerce et les industries, d'assujettir à des obligations plus étroites les repris de justice, de réprimer avec plus d'énergie les délits d'un certain genre. La désobéissance à ces lois nouvelles peut accroître le nombre des délits sans que la situation morale soit changée. Le nombre même des infractions à une loi qui rompt des habitudes anciennes, qui impose des entraves ou des sacrifices, ne supposera pas un mal violent. »

Le nombre considérable de peines légères prononcées par les tribunaux, joint au petit nombre des acquittements, prouve manifestement que la gravité des délits diminue en même temps qu'ils ont moins de chance de demeurer impunis.

Pour qu'une loi pénale soit véritablement bonne, il est nécessaire, en effet, qu'elle ait assez d'élasticité pour atteindre à la fois chaque acte coupable et ne pas méconnaître ce sentiment d'équité naturelle qui veut que le châtiment soit proportionné au crime. Qu'arrivait-il autrefois sous l'empire du Code pénal de 1810, malgré la latitude laissée aux juges, dans un grand nombre de cas, de punir l'auteur d'un crime de peines variant dans leur durée depuis un *minimum* au-dessous duquel ils ne pouvaient descendre, jusqu'à un *maximum* qu'ils étaient contraints quelquefois d'appliquer? Vous le savez, Mes-

---

[*] *Considérations sur la situation morale de la France d'après les statistiques criminelles*, p. 52.

sieurs, trop souvent le coupable était assuré de l'impunité; et des jurés placés entre la dure alternative de faire prononcer, par suite de leur verdict, une peine qui leur paraissait hors de toute proportion avec la faute commise, ou de renvoyer absous, au milieu de ses concitoyens, un individu qu'au fond ils sentaient coupable, usaient plus que largement du droit laissé à leur conscience. Ils en usaient malheureusement surtout lorsqu'il ne leur était possible de choisir qu'entre l'acquittement absolu ou la mort de l'accusé, et rejetaient au sein de la société ses membres les plus corrompus, plus audacieux, s'il est possible, au sortir de la Cour d'assises, qu'au moment de la perpétration des crimes qui les avaient conduits sur ses bancs.

Tel est, en général, le fruit des lois qui ne sont plus en rapport avec les mœurs d'une nation; mais heureusement Solon peut venir après Dracon. C'est ainsi qu'en France la loi plus humaine de 1832, en permettant au jury de mettre d'accord, par l'admission des circonstances atténuantes en faveur de l'accusé, l'intérêt social et l'équité, a mis un terme à de trop scandaleux acquittements. Les criminels, moins assurés de l'impunité, sont devenus aussi généralement moins audacieux, et la morale publique y a gagné de tout point.

Voici comment appréciait cette loi un des plus illustres et des plus savants magistrats français, M. le président Bérenger [*] :

« Les jurés, disait-il à l'Institut, c'est là un point hors de doute, sont plus généralement enclins à l'indulgence qu'à la sévérité. Ne craignons pas de dire que la preuve en ressort du grand nombre d'acquittements : 369 sur 1000 lorsqu'il fallait huit voix pour la condamnation, et 283 lorsqu'il n'en fut plus exigé que sept. A qui persuadera-t-on, en effet, qu'après la triple épreuve de la poursuite avant jugement, de l'examen des Chambres du Conseil [**], et de celui auquel se livrent les Chambres d'accusation, tant d'innocents eussent été renvoyés sur les bancs des Cours d'assises?

» Mais cette secrète répugnance des jurés à assumer la responsabi-

---

[*] *De la répression pénale, de ses formes et de ses effets.* Rapport lu par M. Bérenger à l'Académie des Sciences morales et politiques (2e Partie), tome IX des Mémoires de cette Académie, p. 481 et suivantes.

[**] Elles sont maintenant supprimées au Criminel. (E. L.)

lité d'une condamnation a été victorieusement combattue par la faculté d'admettre des circonstances atténuantes. Depuis la loi d'avril 1832 qui la leur a impartie, les acquittements ont diminué dans une proportion qui rend hautement témoignage du salutaire effet produit par l'usage de cette faculté. »

Sans vouloir attribuer à la Statistique tout l'honneur de cette importante réforme, il est permis de penser qu'elle ne se serait pas aussi aisément et aussi promptement accomplie, si les esprits intelligents qui s'en faisaient les promoteurs n'avaient pas été mis en état de produire, à l'appui de leurs arguments philosophiques, l'argument irrésistible des chiffres.

Un autre progrès que nous devons à l'existence de la Statistique, c'est celui qui a permis de réduire à la moindre durée possible la rigoureuse mesure de la détention préventive. Certes, s'il y a une chose qui soit respectable entre toutes, c'est la liberté individuelle; la société, lorsqu'elle croit à un péril pour elle, ne doit user qu'avec une extrême réserve du droit que lui donne l'impérieuse obligation de sauvegarder la liberté et les intérêts de tous.

Si des casiers judiciaires, qui permettent de connaître promptement les antécédents des prévenus, n'avaient pas été établis, aurait-on pu, sans être accusé d'une grande témérité, ne pas soumettre à une instruction nécessairement longue et accompagnée d'une détention de même durée, ces mendiants, ces vagabonds et gens sans aveu, inconnus dans le pays où ils sont arrêtés et souvent malfaiteurs des plus dangereux? La loi de 1863, sur les flagrants délits, eût-elle été d'une application possible?

Je sais que cette loi a été l'objet de certaines critiques qui ne sont pas toutes dénuées de fondement, mais il serait puéril de méconnaître ses effets bienfaisants dans nos grands centres de population.

En somme, et quoi qu'en puissent dire des esprits prévenus, la France est maintenant un des pays civilisés où la liberté individuelle et la protection des intérêts sociaux ont, tout à la fois, le plus de sécurité et le plus de garantie.

Nous avons signalé tout à l'heure l'accroissement sensible du nombre des affaires soumises à l'examen des juges correctionnels, et nous avons dit que cet accroissement, qui tend du reste à cesser, tenait,

selon nous, moins à une plus grande perversité des mœurs qu'à l'amélioration des services de la police judiciaire et à la promulgation de lois nouvelles dont l'expérience a fait voir la nécessité; mais n'est-il pas permis, Messieurs, de penser qu'un certain nombre de faits répréhensibles soumis actuellement à l'appréciation des magistrats de la police correctionnelle pourraient être, sans danger, renvoyés devant les tribunaux de simple police? Des actes nombreux qualifiés contraventions, c'est-à-dire punis pour eux-mêmes, quelle que soit l'intention ou la volonté de leur auteur, ne seraient-ils pas, quant à l'application de la peine édictée par la loi, mieux placés dans les attributions des juges de paix? Il faut bien le reconnaître, nos populations attribuent toujours, la peine fût-elle la même que celle qu'appliquerait un tribunal de simple police, une portée beaucoup plus grave à une condamnation prononcée par la police correctionnelle. Cette condamnation figure d'ailleurs au casier judiciaire de l'individu frappé, et le suit pour ainsi dire pendant toute la durée de sa vie. Du moment que l'intention est écartée, que le fait seul est relevé et puni dans la personne de son auteur, pourquoi maintenir deux catégories et refuser aux uns le bénéfice que l'on accorde aux autres?

Pas de délits sans intention coupable, voilà ce que professent nos maîtres; voilà ce qu'enseigne l'équité.

Point de distinction dès lors à établir entre les contraventions. Si quelques-unes paraissent plus graves par la nature des dangers qu'elles peuvent entraîner, que la peine encourue soit plus forte, mais que la juridiction qui statuera soit la même; que les conséquences futures de la peine ne soient pas surtout modifiées tant que l'intention de l'auteur du fait ne sera pas incriminée.

Y aurait-il quelque danger à introduire cette innovation dans nos Codes? Je ne le pense pas. Des esprits qu'on ne taxera pas de témérité demandent sur ce point plus encore; je n'en veux pour preuve que ces quelques lignes de M. le président Bérenger :

« La répression devant des tribunaux de police, nous dit-il [*], est plus efficace que devant les autres juridictions; ce qu'il faut probablement attribuer à cette double circonstance que les peines sont lé-

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences morales et politiques*, t. XI, p. 489.

gères, et que le tribunal qui les prononce est composé d'un juge unique.

» ..... Les parties citées devant les tribunaux de police ne subissent pas d'emprisonnement préventif; cet emprisonnement n'est effectué qu'après condamnation, et ce qui démontre l'impartialité et le bien jugé de cette juridiction, c'est la déférence avec laquelle les parties condamnées acceptent ses décisions et s'y soumettent.

» ..... Ainsi, quoique pour cet ordre de juridiction, le plus humble dans la hiérarchie judiciaire, le tribunal ne soit composé que d'un seul juge, il n'a pas moins d'autorité morale que s'il était plus fortement constitué : n'est-ce pas un indice qui permettrait de supposer qu'on rencontrerait peu d'obstacles dans le sentiment public si, comme en Angleterre, on donnait également à un juge unique, en abrégeant les formes de l'instruction, l'attribution de juger en dernier ressort une foule de petits délits qui surchargent les rôles de nos tribunaux correctionnels, et dont les prévenus, trop souvent placés dans les liens d'une détention préventive, encombrent nos prisons, où leur moralité encourt tant de dangers? »

Si nous étions heureux, Messieurs, de constater tout à l'heure, la Statistique à la main, une réelle amélioration dans la moralité générale du pays, nous devons cependant avouer qu'il est certains points de nature à faire ombre au tableau. Les attentats aux mœurs, les faux, les banqueroutes frauduleuses, etc., ont acquis une fréquence et une gravité qui ne peuvent échapper à personne. Les crimes de ce genre ont suivi, que dis-je? ont dépassé le mouvement industriel de notre époque. La spéculation et l'agiotage nous ont, pour un temps, ramené aux scandales moraux et financiers de la Régence; la facilité de se procurer des ressources par le jeu sur les fonds publics ou sur les valeurs industrielles a perverti bien des hommes qui, sans l'appât d'un gain facile, auraient trouvé sans doute dans un travail plus utile, quoique moins lucratif, la récompense de leur labeur et le moyen de développer leurs aptitudes. Aussi que de calamités, que de revers, après une prospérité factice! Que d'hommes déclassés dont les appétits ont survécu à leur ruine! Est-il une menace plus réelle et plus grosse de dangers suspendue encore sur nous? Il faudra du temps pour cicatriser la plaie morale qu'ont fait à notre société vingt années de mœurs cor-

rompues dans les classes élevées, de gains coupables et de déshabitude de travail dans les classes moyennes, de surexcitations dangereuses semées dans le sein des classes populaires. Une masse de travailleurs, attirée naguère dans les villes pour satisfaire à l'exécution de luxueux caprices, dégoûtée peu à peu des travaux des champs, est exposée, à la moindre crise commerciale, au moindre arrêt dans la production industrielle, à se voir, du jour au lendemain, jetée sans pain et sans abri sur le pavé de nos grandes villes!

La Providence vient de nous donner une cruelle leçon. Espérons qu'elle sera plus efficace que ne l'avaient été les avertissements antérieurs des hommes prudents et éclairés, et que notre chère France, profitant des durs et parfois nécessaires enseignements de l'adversité, saura reconnaître ses fautes, ne demandera sa régénération qu'au travail, et sortira de ses cruelles épreuves, purifiée des souillures du passé, plus grande et plus honorée que jamais!

Je vous demande pardon, Messieurs, d'abuser encore un instant de votre bienveillante attention; mais il est un point que je ne puis totalement omettre, du moment où j'ai entrepris la tâche, bien difficile pour l'orateur, plus pénible peut-être pour les auditeurs, d'esquisser à grands traits les enseignements qu'on peut tirer de la Statistique criminelle : c'est celui qui touche au mode d'application des peines, et au régime des établissements pénitentiaires.

Deux écoles ont longtemps existé : l'une considérant le condamné comme une sorte d'animal nuisible, à l'égard duquel la société n'avait d'autres devoirs à remplir que de le mettre, pendant le temps prescrit pour la durée de la peine infligée, dans l'impossibilité de nuire; l'autre croit qu'il incombe à la société un devoir de plus : tendre à améliorer en punissant.

Je n'ai pas besoin de vous dire, Messieurs, que c'est des théories de cette dernière école que s'est inspiré le législateur français.

Donner à la répression l'efficacité qu'elle réclame; moraliser le condamné en le ramenant, s'il est possible, dans le droit chemin; lui donner le bienfait de l'instruction s'il ne l'a pas encore reçu, lui rendre le goût du travail, s'il l'a perdu; lui fournir les moyens d'acquérir un capital qui lui permette, au sortir de l'établissement pénitentiaire, de ne demander qu'au travail les ressources dont il a besoin; lui présenter

comme récompense de sa bonne conduite future, après une persévérance suffisante, le noble espoir d'obtenir une réhabilitation effaçant jusqu'au souvenir de sa faute, tel est l'esprit de nos lois, tel est le but que nous poursuivons tous.

Est-ce à dire que ce but soit atteint? La Statistique criminelle, notre propre expérience nous montrent trop souvent que non. Les Gouvernements se sont émus en voyant que les résultats obtenus étaient bien loin de répondre à leurs espérances; que parfois le condamné sortait plus corrompu des lieux où l'on espérait pouvoir le ramener dans les voies du bien. Fallait-il renoncer à poursuivre un si noble but? Fallait-il revenir aux errements de l'ancienne école et ne punir que pour punir? Les plus sages esprits ne l'ont pas pensé; ils ont cru qu'une enquête approfondie pourrait conduire à la solution de ce problème difficile, mais intéressant entre tous : *la moralisation du condamné.* Cette enquête est ouverte aujourd'hui. Vous avez été appelés, Messieurs, à y verser les précieux éléments recueillis par votre expérience et vos lumières; il ne m'appartient pas de préjuger ici quel sera le résultat de vos consciencieuses recherches; près de vous, en semblable matière, je n'ai qu'à écouter et à m'instruire.

Je reviens encore par un mot, Messieurs, sur ce que je vous ai dit en commençant au sujet des documents statistiques. S'il est de ces documents dont on ne s'est pas borné à nier l'utilité, mais que l'on n'a pas craint d'accuser d'inexactitude, ce dernier reproche, du moins, n'a jamais été adressé à la Statistique judiciaire.

Confiée à des magistrats éclairés et intègres, elle porte avec elle son cachet d'authenticité. Née d'hier, elle a déjà rendu d'importants services; continuée avec le même soin, elle est appelée à en rendre de plus grands encore. Dans l'avenir, elle sera considérée comme une des mines les plus précieuses par ceux qui auront à écrire l'histoire des hommes et à dresser le bilan de leur moralité. L'écrivain, admirant le bon ordre et les belles proportions de ce majestueux édifice, saluera avec respect ceux qui en ont conçu le plan. Songeant aux labeurs de ces nombreux ouvriers, dont les noms ne lui seront pas parvenus, mais dont les efforts consciencieux auront assuré la solidité du monument, il saura apprécier et remercier ces hommes qui, sans vaine espérance de gloire, et mus par l'unique désir d'être un jour utiles à l'humanité,

ont consacré à d'arides recherches les veilles les plus pénibles et les plus beaux instants de leur vie.

Le magistrat français, à toutes les époques, et c'est là une gloire qu'on ne saurait lui enlever, a toujours su sacrifier ses satisfactions personnelles, ses plus légitimes sentiments d'amour-propre, à ce qu'il considère comme le véritable apanage de l'homme qui accepte et qui assume la terrible responsabilité de juger les autres hommes : *l'accomplissement du devoir!*

RAPPORT

Sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon;

PAR M. BIENAYMÉ.

(Commissaires : MM. MATHIEU, DUPIN, PASSY, BOUSSINGAULT. — *Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1306; séance du 25 novembre 1872.)

Il y a plus d'un tiers de siècle, notre savant confrère de l'Académie des Sciences morales, M. B. de Châteauneuf, avait entrepris de former un catalogue complet des Membres des anciennes Académies et de l'Institut; il voulait savoir comment se survivaient des hommes consacrés à la science; quelle était la durée commune d'un Académicien et quelle pouvait être, aux âges successifs, la vie de cette classe laborieuse. En même temps, il se proposait de publier cette liste de naissances, d'âges à l'élection et d'âges au décès, qui pouvait épargner bien des recherches infructueuses aux auteurs de biographies, même aux auteurs d'histoires, qui ont souvent besoin de certaines dates exactement fixées.

Rien de plus simple en apparence qu'un pareil travail; mais, en réalité, quoique la plus ancienne des Académies ne remontât pas à deux siècles, lorsque notre confrère commença ses recherches sur la vie de leurs Membres, ce laps de temps était plus que suffisant pour rendre la constatation des dates très-difficile, et même impraticable pour quelques savants moins connus. On ne reconstitue jamais une statistique qui n'a pas été dressée au moment des faits. On ne saurait trop répéter cette vérité; car chaque jour on demande des résultats statistiques dont personne n'a voulu tenir registre, dont personne n'a voulu faire les frais. Les obstacles accumulés que rencontra M. de Châteauneuf ne le rebutèrent pas cependant; mais on peut voir que,

dans son *Mémoire sur la durée de la vie des Savants* (collection de l'Académie des Sciences morales pour 1840), il n'est question que des Membres titulaires des trois anciennes Académies et des classes correspondantes de l'Institut élus avant le 1er janvier 1840. Il y reconnaît qu'un certain nombre de dates lui ont manqué; il ne parle pas de la publication du Catalogue, qu'il jugeait alors trop imparfait, et dont on sait qu'il s'est occupé jusqu'aux derniers jours de sa vie, sans pouvoir le compléter; enfin, dans les tableaux numériques qu'il donne, les nombres des Membres vivants au 1er janvier 1840 n'ont pas été imprimés. Or ces nombres, distribués par âge, seraient indispensables pour déduire de ces tableaux les rapports de mortalité.

Le Mémoire se rapporte ainsi bien plutôt à la durée moyenne d'un Académicien qu'à la durée de la vie des Académiciens aux différents âges. Il offre néanmoins un grand intérêt de détails, et il serait plus curieux encore si M. de Châteauneuf avait fait plus d'usage d'une table de mortalité que ses listes avaient permis de former; mais il en indique à peine l'existence par un rapprochement assez difficile à saisir pour le lecteur qui ignore cette particularité. Il avait craint, sans doute, qu'une table basée sur un nombre de têtes peu considérable ne fût sujette à de justes objections; mais ce ne sont pas les faits exacts qui peuvent être contestés, et une table qui n'a rien subi d'arbitraire ne représente que les faits; ce qui est sujet au doute, ce sont les conséquences, qui sont parfois déduites très-imprudemment de ces faits; ce sont les généralisations hâtives que les auteurs, trop enthousiasmés du résultat de très-pénibles investigations, veulent à toute force faire sortir de données trop peu multipliées, soit en nombre, soit dans l'espace, soit dans le temps. La table fondée sur les éléments recueillis par notre confrère sera donc tout à l'heure le sujet de comparaisons très-licites avec des renseignements plus récents qui ont été soumis à la Commission chargée par l'Académie de prononcer sur le Concours pour le prix de Statistique de l'année 1870.

Ces renseignements forment la matière d'un volume in-8° de plus de 400 pages, qui se rapportent uniquement aux Membres et aux Correspondants de l'Institut, depuis la création, en 1795, jusqu'au 19 novembre 1869. La liste des Membres et des Correspondants est complète. L'auteur, M. Potiquet, s'est assuré, par des recherches persé-

vérantes pendant de longues années, des noms, prénoms, dates et lieux de naissance, dates de nomination, dates et lieux de décès, et il a fait imprimer ce Catalogue de plus de deux mille noms. C'est là une statistique dont tout le monde peut vérifier au moins certaines parties; de sorte que si, malgré les soins zélés de l'auteur, il s'y rencontre encore quelque erreur, elle sera indubitablement corrigée. Son livre se recommanderait donc au seul titre de nomenclature exacte de l'Institut. Ce répertoire atteint, pour les Membres de ce corps savant, le but que s'était proposé M. de Châteauneuf pour toutes les Académies, en remontant à un passé que les documents existants ne pouvaient restituer dans son intégrité.

M. Potiquet a fait précéder son Catalogue des renseignements nécessaires sur la création de l'Institut et sur les diverses organisations qu'il a reçues. L'ordre suivi, du reste, est l'ordre des élections successives dans chaque Académie, ou classe, en s'astreignant autant que possible à la série des fauteuils et à la série des organisations, ce qui forme en quelque sorte la suite historique des Académies. Il en résulte quelques répétitions; car les diverses organisations ont nécessité la reproduction de plusieurs noms, sans compter les quatre-vingt-six noms qui figurent à la fois dans plus d'une Académie; mais, pour faciliter les recherches, l'auteur a mis à la fin du volume une table alphabétique qui renvoie sans peine aux pages où chaque Membre se trouve nommé.

Les résultats que cette table permet de mettre en évidence ne concordent pas exactement avec plusieurs de ceux dont M. de Châteauneuf avait fait le calcul; ainsi notre confrère indiquait comme âge moyen d'un Académicien à l'admission quarante-quatre ans deux mois, et comme âge au décès soixante-huit ans dix mois, ce qui assigne une durée moyenne de vingt-quatre ans huit mois à chaque Académicien.

M. Potiquet a constaté, pour les Membres de l'Institut, des nombres très-différents. L'âge commun d'admission serait de cinquante et un ans dix mois, et l'âge, au décès, de soixante et onze ans cinq mois. La durée moyenne d'un Membre n'atteindrait donc que dix-neuf ans sept mois.

Mais ces discordances sont plus apparentes que réelles; il faudrait,

pour en décider, rendre identiques les termes de comparaison, qui ne le sont pas. Il n'était pas possible de se livrer à l'exécution d'un travail aussi minutieux ; mais il a suffi de prendre séparément, dans l'ouvrage de M. Potiquet, les nombres afférents aux trois Académies anciennes, dont M. de Châteauneuf s'est exclusivement occupé, pour retrouver une durée moyenne de vingt-trois ans deux mois.

A la vérité, l'âge à l'admission et, par suite, l'âge au décès restent bien plus élevés : quarante-huit ans deux mois et soixante-onze ans quatre mois; mais les divergences s'expliquent quand on considère que le temps n'a pu encore effacer pour l'Institut l'influence de l'âge avancé d'un grand nombre de Membres lors de la création.

Un autre fait, qui contribue à motiver les âges trouvés par M. Potiquet, fait qui mérite d'être signalé ici, c'est que les Académiciens libres ne sont, en général, reçus que dix ans plus tard que les autres Membres, si ce n'est à l'Académie des Beaux-Arts.

Pour les cent trente Membres libres compris dans le Catalogue de M. Potiquet, l'âge moyen à l'admission a été de cinquante-sept ans huit mois ; l'âge, au décès de quatre-vingt-seize d'entre eux, de soixante-treize ans deux mois, et, par suite, la durée moyenne seulement de quinze ans six mois.

Si l'âge d'entrée des Membres libres de l'Académie des Beaux-Arts n'était, par exception, légèrement au-dessous de celui même de leurs confrères, les différences qui ressortent des recherches de M. Potiquet seraient encore bien plus considérables.

Il paraît que ces différences avaient frappé M. de Châteauneuf et lui avaient causé quelque embarras. Il avait, en conséquence, exclu de ses listes tous les Membres qualifiés du titre d'Académicien honoraire ou d'Académicien libre, dans les anciens corps savants qu'il examinait. Il lui avait semblé qu'ils ne vivaient pas de la même vie que les hommes de lettres et les savants, et c'était seulement de cette vie scientifique qu'il voulait se rendre compte; mais, s'il avait raison quant à la durée académique, comme on vient de le voir, il n'y avait pas lieu d'en rien conclure pour la vitalité, ni pour la mortalité à chaque âge; et cela est bien facile à concevoir sans entrer dans plus de détails.

Aussi, pour les comparaisons relatives à la durée de la vie, la liste de M. Potiquet a été prise tout entière. La table de mortalité qui en

a été déduite repose sur mille trente têtes, chiffre des Membres de l'Institut nommés ou élus depuis trois quarts de siècle, y compris les Membres libres et les Associés étrangers (au nombre de cent quarante).

Ces mille trente personnes ont donné plus de vingt mille années d'existence; de sorte que, en ne commençant qu'à l'âge de trente-cinq ans, il était possible de trouver des nombres assez grands pour mériter l'attention.

La table de mortalité dressée sur les éléments recueillis par M. de Châteauneuf contient aussi plus de vingt mille années d'existence.

Voici d'abord, en regard, ces deux tables et celle de Deparcieux réduites à mille personnes de l'âge de trente-cinq ans. Les survivants ne sont marqués que de cinq en cinq ans, parce que les nombres sont trop peu considérables pour permettre l'examen d'année en année, et qu'il ne pouvait être question ici d'aucune des modifications et interpolations que les auteurs des tables de mortalité font subir aux données premières.

Tables de survivance ou de mortalité.

	Anciennes Académies (M. de Châteauneuf).	Institut (M. Potiquel).	Tontiniers de Deparcieux.
A 35 ans.....	1000	1000	1000
40	956	964	947
45	906	930	896
50	864	894	837
55	785	819	758
60	714	744	667
65	619	638	569
70	483	505	447
75	357	374	304
80	205	219	170
85	89	95	69
90	34	30	16
95	8	7	
100	1		

On ne peut qu'être surpris du peu d'étendue des écarts entre la table de M. de Châteauneuf et celle de M. Potiquet.

Elles ont, il est vrai, une partie commune : ce sont les Membres de l'Institut de 1795 à 1839 pour les trois anciennes Académies; mais cela ne semblait pas *a priori* devoir influencer les résultats au point de ne pas laisser de grandes différences. Si, toutefois, il en était ainsi, ce serait une confirmation de l'exactitude et du soin des auteurs, dont les travaux ont été absolument indépendants.

Les deux tables sont d'ailleurs notablement plus lentes que celle de Deparcieux. M. B. de Châteauneuf a été d'opinion que la vie calme des savants et des gens de lettres devait allonger leur existence, même au delà de celle des tontiniers de Deparcieux, qu'il regardait comme des têtes choisies. D'après ce qu'on sait aujourd'hui, il ne paraît pas que le choix des têtes ait une grande influence lorsqu'elles se choisissent elles-mêmes, comme dans les tontines. Quant à la vie calme des savants, il semble que notre confrère ait oublié au prix de quels efforts, de quels excès de travail s'acquiert la science : la passion même des lettres et des sciences n'entraîne-t-elle pas à passer des nuits à la poursuite d'une idée? et s'il y a lieu de s'étonner, c'est que les Membres des corps savants, usés par le labeur, aient pu conserver une vitalité à peu près semblable, ou peut-être un peu supérieure, à celle de la table de Deparcieux qui, malgré ses défauts, paraît représenter assez bien la vie commune. N'est-il pas à présumer que, pour supporter les grandes fatigues qu'imposent les lettres et les sciences portées au point d'ouvrir les portes des Académies, il faut être doué d'une vitalité plus grande qu'on ne le croirait au premier abord; de sorte que, malgré d'immenses travaux, qui ne trouvent jamais les jours assez longs, malgré les imprudences de l'homme de lettres et du savant, il reste à des constitutions d'élite une existence assez prolongée là où des tempéraments moins robustes auraient succombé. Ces réflexions se présentent naturellement quand arrive le souvenir de tous ces jeunes gens paraissant pleins d'avenir et qui s'éteignent en si grand nombre sur les avenues de la science.

De quelque manière qu'on veuille s'expliquer le fait qu'offrent les tables qui viennent d'être reproduites, il sera bon de se rappeler qu'elles sont uniquement l'expression de ce qui s'est passé parmi un nombre de personnes relativement petit (environ 1300), et qu'il ne faut pas les considérer comme une loi de mortalité qui exigerait des

nombres tout autrement considérables. Ces tables disent seulement : si mille individus de trente-cinq ans se survivaient comme cela s'est passé dans les Académies, en gardant les mêmes proportions, ils se succéderaient ainsi.

Il convient de faire remarquer que ces tables ont été déduites des rapports de décès aux nombres de vivants dans chaque âge, sans y rien changer. Voici un tableau de ces rapports de cinq en cinq ans :

Rapports de mortalité (*nombre de décès sur* 1000 *en cinq ans*).

	Anciennes Académies (M. de Châteauneuf).	Institut (M. Potiquet).	Tontiniers de Deparcieux.
De 35 à 40 ans.....	44	36	53
40 45	53	36	53
45 50	46	36	66
50 55	92	84	95
55 60	89	91	120
60 65	134	144	147
65 70	220	208	215
70 75	261	259	319
75 80	427	415	441
80 85	564	568	593
85 90	617	683	771
90 95	768	750	

On voit que la mortalité des tables académiques à tous les âges est inférieure à celle de la table de Deparcieux, sauf de soixante-cinq à soixante-dix ans. Pour cet intervalle, M. de Châteauneuf a trouvé deux cent vingt décès sur mille individus de soixante-cinq ans; il n'en est donc arrivé que sept cent quatre-vingts à soixante-dix ans. Deparcieux n'indique que deux cent quinze décès, et par conséquent sept cent quatre-vingt-cinq survivants après cinq ans. M. Potiquet n'a constaté que deux cent huit décès sur mille au même âge, et la supériorité des temps récents se maintient à tous les âges.

Comme on est habitué à juger de la vitalité par la comparaison des vies moyennes à chaque âge, il n'a pas paru superflu d'ajouter ici le tableau des vies moyennes des trois tables précédentes, sans prétendre,

bien entendu, les adopter comme les véritables vies moyennes assignables aux Membres de l'Institut. On va reconnaître combien les tables se rapprochent à ce point de vue.

Vies moyennes.

	Anciennes Académies (M. de Châteauneuf).	Institut (M. Potiquet).	Tontiniers de Deparcieux.
	ans.	ans.	ans.
A 35 ans.....	32,59	33,58	30,88
40	28,97	29,74	27,47
45	25,43	25,74	23,88
50	21,54	21,65	20,38
55	18,45	18,41	17,24
60	15,04	14,99	14,25
65	11,94	12,05	11,25
70	9,58	9,57	8,63
75	7,04	7,02	6,51
80	5,87	5,28	4,75
85	4,66	4,16	3,34
90	3,51	2,68	2,08

Il y aurait encore bien des conséquences à déduire des listes de M. Potiquet : telle serait d'abord une table de mortalité des Correspondants; mais il convenait, d'une part, de circonscrire ici les citations, et, d'une autre part, il eût été difficile de demander à l'auteur des dépouillements spéciaux de son livre à de nombreux points de vue.

La Commission donne à ce travail consciencieux le prix fondé par M. de Montyon.

Elle a accordé une mention honorable à la partie statistique d'un ouvrage de M. Thévenot sur le canton de Ramerupt. L'auteur, à dire vrai, a plus approfondi l'historique de ce petit canton du département de l'Aube que la statistique proprement dite. Les renseignements relatifs à l'agriculture sont nombreux et intéressants; mais tout ce qui se rapporte à la population est très-abrégé et semble pris simplement aux sources officielles. C'est cependant le mouvement de la population qui seul peut mettre en plein jour la valeur des documents agricoles.

La description du canton donne l'idée d'une situation florissante, et cependant l'auteur constate que, de 1826 à 1866, la population recensée n'a cessé de décroître : de 9095 habitants à la première époque, elle est descendue à 7854 dans la dernière. Un pareil fait, durant quarante années sans interruption, méritait bien d'être le sujet de recherches spéciales, et la diminution des naissances, qui date de plus loin encore, aurait dû attirer toute l'attention de l'auteur; mais à peine en parle-t-il dans le texte; les faits ressortent dans des tableaux sur lesquels il n'est fait aucune réflexion. C'est cependant pour de petites agglomérations, comme le canton de Ramerupt, qu'il est possible de trouver sans trop de difficultés tous les détails qui rendent une statistique intelligible. C'est là qu'il est permis de lier les unes aux autres les diverses classes de faits, sans se livrer aux conjectures et aux hypothèses qui, trop souvent, se mêlent à la Statistique, ou même la remplacent tout à fait. Malgré ces défectuosités, la partie statistique entièrement agricole, comme il a été dit tout à l'heure, montre que l'auteur n'a pas épargné ses recherches sur les points qui lui paraissaient importants; aussi son Ouvrage a-t-il été imprimé dans les Mémoires de la Société académique de l'Aube, qui l'avait couronné dans un de ses concours [*].

Une autre mention honorable est également accordée à une brochure touchant l'*influence de la température sur la mortalité de Montpellier*, par M. A. Castan. L'auteur n'a recueilli que les décès de dix années, de 1859 à 1868; mais la mortalité des enfants au-dessous de deux ans est tellement prononcée pendant les mois de juin, juillet et août, qui emportent près de la moitié des décès de cet âge, qu'il ne peut rester de doute sur l'influence funeste de la saison d'été sur les enfants.

---

[*] L'Académie n'ignore pas que le petit bourg de Ramerupt était la patrie d'adoption de M. Ch. Delaunay, l'illustre astronome qui vient de lui être ravi si prématurément par une mort affreuse. Il n'était pas possible de passer sous silence le nom de notre regretté confrère et sa fin déplorable en parlant de Ramerupt; car le livre dont il vient d'être question rappelle plus d'une fois ce nom en termes élogieux ; M. Delaunay avait fait construire une maison d'école pour les filles, sous l'invocation de sainte Olympe, et en avait fait don à la commune de Ramerupt, il y a environ quinze ans.

C'est, au contraire, la saison d'hiver (décembre, janvier et février) qui frappe le plus les vieillards à partir de l'âge de soixante ans.

Mais il ne suffisait pas des décès pour bien reconnaître les effets de la mortalité et de la température : le rapprochement des naissances était indispensable, et même le recensement par âges. A la vérité, ce genre de recherches devient très-difficile dans une grande ville telle que Montpellier. Il a été publié plusieurs volumes sur la population de Montpellier; malheureusement les tables qu'ont formées Mourgues, Murat et d'autres pour cette ville sont construites d'après des principes inexacts et sont à bon droit suspectes. M. Castan a eu toute raison de recommencer cet examen, et, s'il ne l'a pas exécuté complétement, du moins n'a-t-il tiré aucune conséquence que ne semblent justifier les chiffres qu'il a publiés. C'est un mérite réel; mais la constatation des causes qui rendent l'été plus dangereux pour les enfants dans une grande partie du midi de la France est encore à achever.

Il a été présenté à la Commission un *Rapport sur la statistique de trois hôpitaux de Lisbonne*, par le Dr P.-F. da Costa Alvarenga. Le concours ouvert par M. de Montyon n'admettant que des ouvrages relatifs à la France, la Commission n'avait pas à se prononcer sur ce travail. Toutefois elle a cru devoir consigner ici le motif péremptoire prescrivant d'écarter du Concours un travail qui ne lui a point paru sans mérite.

En résumé, la Commission décerne :

1° Le prix de Statistique pour 1870 à M. Potiquet, pour son Ouvrage intitulé : l'*Institut de France, ses diverses organisations, ses Membres, ses Associés et ses Correspondants* (1 vol. in-8; Paris, 1870);

2° Une mention honorable à M. A. Thévenot, pour la partie relative à l'Agriculture de sa *Statistique générale du canton de Ramerupt* (1 vol. in-8; Troyes, 1868);

3° Une mention honorable à M. A. Castan, pour son Mémoire intitulé : *De l'influence de la température sur la mortalité de la ville de Montpellier* (brochure in-8; Montpellier, 1870).

RAPPORT

Sur le Concours pour le prix de Statistique, fondation Montyon;

PAR M. BIENAYMÉ.

(Commissaires : MM. MATHIEU, DUPIN, PASSY, BOUSSINGAULT. — *Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1349; séance du 25 novembre 1872.)

De tout temps les moralistes, les satiriques se sont élevés contre la corruption des mœurs de leur siècle; à les entendre, il semble que le mal va toujours croissant. Heureusement il n'en est rien; s'ils ont raison lorsqu'ils cherchent à rendre les mœurs moins dépravées dans certaines parties de la société, et même quand ils s'efforcent d'imprimer plus de sévérité à la morale générale, ils se trompent assurément lorsqu'ils croient à la dégradation successive de la race humaine. Il y a longtemps que cette race aurait disparu de la terre, non-seulement si la corruption avait été en augmentant, mais il aurait même suffi, pour détruire les hommes, que le vice, à un certain degré, fût devenu permanent. La statistique du passé manque à peu près complétement; elle détruirait sans doute bien des opinions erronées sur les vertus de certaines époques comparées à la nôtre, de même que la statistique du présent fait aisément justice de bien des exagérations, qu'on semble prendre plaisir à accumuler aujourd'hui. Jamais, en effet, une littérature plus malsaine peut-être n'a calomnié son siècle en publiant sous toutes les formes toutes les infamies qu'elle pouvait ramasser dans la boue des grandes villes, en faisant, pour ainsi dire, remonter au grand jour ces vices qui, d'ordinaire, restaient ensevelis dans leur propre fange. Comment la Statistique vient-elle démentir ces tableaux hideux qu'on a tracés à l'envi comme représentant la société actuelle? C'est ce qu'on peut voir dans l'Ouvrage qui a été distingué par la Commis-

sion chargée par l'Académie de décerner, pour 1871, le prix fondé par M. de Montyon.

Cet Ouvrage a pour titre : *Le mariage en France. Statistique. Réformes.* La Commission n'avait à juger que la partie statistique, laissant, du reste, à l'auteur, M. E. Cadet, la responsabilité de ses idées. Ce qui a surtout attiré son attention, c'est le soin avec lequel il a cherché à s'éclairer sur la valeur des matériaux statistiques qu'il employait. Ainsi l'on avait signalé le chef-lieu d'un de nos départements du Midi comme présentant une proportion inouïe d'enfants illégitimes. M. Cadet a appris de la municipalité que cet état de choses venait de cesser. Il résultait du nombre assez considérable de filles mères attirées dans cette petite ville par une sage-femme, connue pour se charger de déposer les enfants aux hospices. Cette misérable a été déférée aux tribunaux, et ce scandale a disparu.

Pour la France entière, le rapport des naissances naturelles au total des naissances n'est pas de plus de $\frac{1}{13}$, et il serait moindre encore si l'on pouvait éliminer le nombre des enfants légitimes qui se trouvent confondus parmi les naturels. Le rapport de 1 à 13 ou 14 est peut-être le plus faible des grands pays de l'Europe.

L'auteur donne le tableau des séparations de corps prononcées par les tribunaux. En vingt-sept ans, le nombre annuel s'est accru par une progression bien faite pour inquiéter : il a triplé. Mais M. Cadet fait remarquer que les demandes, en presque totalité (90 pour 100), sont faites par les femmes; et ces demandes croîtront peut-être encore, à mesure que les femmes se sentiront plus protégées. Il en a été ainsi pour les vols domestiques, dont le nombre a paru s'accroître lorsque les témoins n'ont plus manqué et que les maîtres, soutenus par l'opinion, se sont vus en mesure de réclamer une justice, que naguère ils n'invoquaient pas.

Il y a donc, on le voit, des faits qu'il faut savoir interpréter pour en déduire des conséquences vraies. Il n'est pas douteux que l'ensemble des données statistiques étudiées par l'auteur n'ait exercé une grande influence sur les opinions qu'il a pu se former au sujet du mariage. Probablement, en abordant les questions délicates et si intéressantes qu'il a traitées, il avait présumé qu'il aurait à peindre la situation des choses sous des couleurs beaucoup plus rembrunies; mais le mariage

est bien plus honoré en France que certains écrivains ne semblent le croire. Au milieu de nos désastres, c'est une justice que les faits nous rendent : d'une part, le nombre des enfants naturels est moindre qu'à l'extérieur, et de l'autre presque tous les hommes se marient.

On peut remarquer, effectivement, que les classes du recrutement, dont le nombre est bien connu, ont présenté, pour les dix années de 1856 à 1865, une moyenne annuelle de 314,622 hommes de vingt à vingt et un ans; dans le même temps, la moyenne annuelle des mariages de garçons a été de 261,486 : la différence n'est donc que de 53,136.

Mais cette différence ne représente pas seulement le nombre des hommes qui auraient pu se marier et sont restés célibataires : il faut en déduire tous les décès de garçons depuis l'âge de vingt ans jusqu'à l'âge commun des mariages. Cet âge n'a jamais été calculé exactement dans la statistique officielle; mais on sait qu'il est à peu près de vingt-huit à trente ans. On peut donc évaluer à 7 sur 100 le nombre des décès de garçons de vingt à vingt-huit ans : sur 314622, c'est 22023 au moins à déduire. Il reste ainsi 31113 hommes qui doivent ne point se marier en France. Ce serait à peu près 1 célibataire sur 10, si la totalité devait rester dans son pays; mais il est bien évident que c'est sur ce nombre qu'il faut imputer tous ceux qui émigrent sans esprit de retour. Or, quoiqu'on répète souvent que les Français n'émigrent point, il serait plus vrai de dire qu'ils émigrent peu. Cependant ce mouvement de population est assez sensible, sans être toutefois comparable aux grandes expatriations de l'Angleterre et de l'Allemagne. Le dernier recensement de la république de Buenos-Ayres fait connaître qu'il s'y trouvait cette année 38000 Français. Il y a ainsi partout des colonies de Français. Il serait difficile d'apprécier avec quelque exactitude le nombre d'émigrants annuellement nécessaire pour entretenir ces groupes; mais il ne saurait être moindre de 6000 à 10000 hommes dans la fleur de l'âge. Sur les 31000 garçons non mariés, il n'en reste réellement dès lors que 25000 à peu près, qui auront à fournir la mortalité future d'abord et dont le reste, peut-être le $\frac{1}{16}$ du total des hommes de vingt ans, représentera tous ceux que les infirmités ou des circonstances particulières empêchent de se marier; puis enfin ceux que l'égoïsme ou l'immoralité détourne du mariage. On

voit que le nombre de ces derniers sera beaucoup moindre qu'on ne pourrait le croire. Il est donc vrai de dire qu'en France presque tous les hommes qui peuvent se marier se marient tôt ou tard.

Si l'auteur avait appliqué à ces recherches l'esprit judicieux dont son livre témoigne à tant d'égards, il aurait sans doute envisagé la situation des mariages dans notre pays d'un œil plus satisfait et plus rassuré. Quoi qu'il en soit, ce livre n'est pas fait pour décourager ceux qui croient à la morale publique; au contraire, il faut le redire, il y a en France moins d'enfants naturels et plus de mariages que dans une grande partie de l'Europe : aussi y trouve-t-on plus d'hommes mariés.

La permanence des armées, à laquelle on attribue l'âge des mariages, âge qu'on trouve trop élevé, par suite l'accroissement du nombre des enfants naturels, et qui, d'ailleurs, a été l'objet de bien d'autres incriminations, dont on aperçoit la trace dans le court chapitre que M. Cadet a consacré à ce sujet, la permanence des armées a été pour le Dr Ely le motif d'une brochure d'un grand intérêt, dans laquelle l'auteur combat, à l'aide de faits authentiques, toutes les exagérations dans lesquelles on est tombé à cet égard, surtout depuis quelques années.

Certainement une armée ne peut être entretenue sans accroître la mortalité, certainement c'est une charge, et une lourde charge; mais, la France le sait trop, c'est à ce prix, à ces conditions qu'une nation subsiste, et c'est manquer à la patrie comme à la vérité que d'en noircir le tableau. L'accroissement de la mortalité est relativement peu considérable; le rapprochement de chiffres exacts prouve que, s'il y a une mortalité plus grande dans la vie militaire en temps de paix que dans la vie civile, ce n'est pas les jeunes soldats qu'elle frappe : ce sont les hommes de quarante ans et plus, dont il y avait environ 20 000 dans l'effectif. L'auteur aurait pu ajouter que, dans les pays où il n'existe pas de service obligatoire, on a remarqué une augmentation de mortalité aux âges de vingt à vingt-cinq ans, de même qu'en France.

D'un autre côté, la race est loin d'avoir dégénéré, comme on l'a avancé imprudemment, car la taille moyenne du contingent est restée la même depuis de longues années, $1^{m},656$: le rapport seul des tailles élevées s'est faiblement abaissé de $17\frac{1}{2}$ pour 100 à 17 pour 100 de 1830-1834 à 1860-1864. D'ailleurs, il est constant que les exemptions

pour défaut de taille ont diminué notablement et que les conseils de révision examinent beaucoup moins d'hommes, un tiers de moins, pour former le contingent. Rien n'indique, par conséquent, un affaiblissement des forces humaines en France.

La loi nouvelle sur le service militaire permettra bien des mariages que les anciens règlements avaient pu retarder; on saura donc bientôt si l'âge moyen de vingt-huit ans et demi en recevra quelque abaissement. Mais, pour établir une comparaison exacte, il sera nécessaire de connaître avec précision l'âge des mariages, qui, comme il a été dit, est fort mal déterminé jusqu'à présent. Il ne faut pas recommencer, pour cette donnée importante, des comparaisons aussi erronées que celles que des économistes font encore de la mortalité actuelle avec la Table de Duvillard, qui n'a jamais existé que dans les idées mal fondées de cet auteur; ou bien les comparaisons que l'on reproduit sans cesse des recensements de nos jours avec l'évaluation de la population de Necker, qui ne reposait que sur un calcul entièrement arbitraire, et nullement sur un recensement effectif.

Au surplus, si l'on a égard aux opinions antiques, il ne paraît pas fort à désirer que l'âge moyen des mariages diminue. Platon parle de trente-cinq ans, puis de vingt-huit, comme d'un âge convenable pour les hommes. Récemment, aux États-Unis, on a eu l'occasion de constater que l'homme grandit encore au delà de vingt-cinq ans. Il se pourrait que des mariages précoces donnassent inutilement des enfants chétifs, et dont la vie très-courte ne serait qu'une charge onéreuse pour la société, affligeante pour les parents. Malheureusement la statistique n'a pas recueilli le moindre fait sur ce point et l'on ne sait rien sur l'âge des conjoints dont les enfants ont vécu le plus longtemps. Comme la plupart des familles disparaissent très-vite, peut-être serait-il possible d'arriver à quelques résultats positifs, à l'aide d'un état civil bien tenu et ayant d'ailleurs, comme en Suède, plus d'un siècle de durée.

La brochure du Dr Ely examine longuement les effets du recrutement sur l'agriculture où, dit-on, le manque de bras se fait toujours sentir. Cet effet était-il aussi peu sensible qu'il le croit? Il y avait, au 1er janvier 1867, sous les drapeaux 184 653 hommes seulement appartenant aux travaux agricoles. La population agricole mâle est portée

par lui à 9737000 personnes, c'est-à-dire qu'en somme l'armée avait enlevé 19 agriculteurs sur 1000. Voilà le chiffre brut; mais si l'on déduit de ce nombre tous les hommes servant volontairement à titres divers, le rapport tombait à moins de 7 sur 1000. Il est pénible de prévoir que ce rapport très-faible sera nécessairement augmenté par la loi nouvelle du recrutement, qui a été obligée de mettre la France en état de résister à cette effroyable manière de faire la guerre consistant à jeter des nations entières les unes sur les autres pour piller et rançonner les vaincus, comme aux temps les plus barbares; seulement on ne les emmène plus en esclavage.

A la dernière page de la brochure, si digne d'attention, du Dr Ely se trouve une faute d'impression qu'il aura sans doute remarquée et qui mérite un *erratum*. Ce n'est point 6 pour 1000, mais bien 2 pour 100 qu'il faut lire relativement à l'accroissement de la population dans l'hypothèse où il s'est placé. Mais il ne s'agit que d'une hypothèse, et la différence de ces deux rapports ne modifie en rien les autres conclusions de son travail.

La Commission a jugé que les parties statistiques des deux Mémoires dont il vient d'être donné connaissance méritaient ses suffrages et elle a décerné :

1° Le prix de 1871 à M. Ernest Cadet, pour la partie statistique de son ouvrage intitulé : *Le mariage en France. Statistique. Réformes;* vol. in-8°, 1870;

2° Une mention honorable à M. le Dr Ely, pour sa brochure intitulée : *L'armée et la population. Études démographiques;* vol. in-8°, 1871.

RAPPORT

Sur deux Mémoires présentés à l'Académie par M. Maximilien Marie, *et ayant pour titres, l'un : « Détermination du point critique où est limitée la région de convergence de la série de Taylor », l'autre : « Construction du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor »*;

Par M. V. PUISEUX.

(Commissaires : MM. Bertrand, Bonnet et Puiseux. — *Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 618; séance du 10 mars 1873.)

Lorsqu'une fonction y d'une variable imaginaire x doit satisfaire à une équation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

elle a généralement plusieurs valeurs pour chaque valeur de x. Concevons que x varie d'une manière continue à partir d'une certaine valeur initiale a; choisissons pour la valeur initiale b de y une racine de l'équation

$$f(a, y) = 0,$$

que nous supposerons n'être ni multiple ni infinie, et enfin assujettissons y à varier d'une manière continue avec x. Alors y ne cessera pas d'être une fonction finie et déterminée de x, si toutefois on évite de faire prendre à cette variable certaines valeurs critiques dont la définition n'a pas toujours été donnée avec une précision suffisante.

On peut, en multipliant l'inconnue y par une fonction entière de x, faire en sorte que la nouvelle inconnue ne devienne plus infinie pour aucune valeur finie de x. Cette supposition admise, on a souvent dit que les valeurs critiques de x sont celles pour lesquelles la fonction y devient une racine multiple de l'équation proposée.

Cette définition est exacte en général; en effet, pour une telle valeur c de x et pour la valeur correspondante de y, on a

$$\frac{df}{dy} = 0;$$

mais généralement on n'aura pas en même temps

$$\frac{df}{dx} = 0.$$

Alors la racine considérée fera partie d'un groupe de fonctions qui échangent circulairement leurs valeurs lorsque le point M, correspondant à la variable x [*], décrit un cercle infiniment petit autour du point C correspondant à c. Lors donc que le point mobile M suivra un chemin passant par le point C, la valeur de y cessera au delà de ce point d'être complétement déterminée; car si l'on déforme un peu le chemin sans en changer les extrémités, la valeur finale de y sera différente, selon que le point M aura passé d'un côté ou de l'autre du point C.

Mais si au point C on avait à la fois

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0,$$

il pourrait arriver que la fonction y ne s'échangeât avec aucune autre autour de ce point, et restât par conséquent déterminée, lorsqu'on le franchirait; c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si les dérivées partielles $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$ n'étaient nulles ni l'une ni l'autre, non plus que l'expression

$$\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2.$$

Dans ce cas, la valeur c de x ne serait pas véritablement critique.

---

[*] Nous entendons par là, suivant l'usage, le point qui a pour coordonnées rectangulaires la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur de x.

Pour éviter les exceptions que comporte la définition précédente, M. Marie appelle *valeurs critiques de x* les valeurs qui rendent infinie y ou l'une de ses dérivées. Cette définition nous semble préférable à l'autre, surtout quand on se propose d'étudier les conditions de possibilité du développement de la fonction y par la série de Taylor.

M. Marie s'est occupé spécialement de ce dernier problème, que l'on peut poser comme il suit : Étant données la valeur initiale a de x et la valeur correspondante b de y, trouver dans quelles limites la fonction y peut être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x - a$.

On sait par les travaux de Cauchy qu'un tel développement subsiste tant que le point mobile M, correspondant à x, reste dans l'intérieur d'un cercle, qui a pour centre le point A correspondant à a et qui ne renferme aucun point critique, c'est-à-dire aucun point correspondant à une valeur critique de x.

Mais il convient de faire ici une distinction sur laquelle M. Marie insiste dans son premier Mémoire. Le point M, décrivant un chemin continu à partir de la position initiale A, peut arriver dans une position C qui soit critique pour quelques-unes des valeurs de y, que détermine l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

et qui ne le soit pas pour les autres. Dans ce cas, la circonférence décrite du point A comme centre avec AC pour rayon ne limitera la convergence de la série que si le point C est critique pour la racine particulière y que l'on considère. Il ne serait donc pas exact de dire d'une manière générale que la convergence est limitée par la circonférence dont le rayon est la distance du point A au plus voisin de tous les points critiques répondant aux diverses racines de l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

Cette distinction n'a sans doute pas échappé à la plupart des géomètres qui se sont occupés de ces questions; cependant elle n'a pas toujours été formulée assez nettement, et le rapporteur pourrait citer un passage de ses propres écrits d'où il semblerait résulter que la cir-

conférence de moindre rayon donne toujours la limite de la convergence. Il est vrai que cette interprétation se trouve démentie par un autre passage du même Mémoire; mais enfin on doit reconnaître que, si l'erreur n'a pas existé dans l'esprit de l'auteur, son langage n'a pas été suffisamment correct. Quoi qu'il en soit, M. Marie a eu raison d'insister sur la nécessité de faire cesser la confusion qui pourrait rester à cet égard dans quelques esprits [*].

Cette remarque faite, M. Marie s'est proposé de traiter la question suivante :

Une équation

$$f(x, y) = 0$$

étant donnée, et une fonction particulière y étant choisie parmi celles que détermine l'équation, assigner le rayon du cercle de convergence correspondant à une valeur initiale donnée de x.

On voit aisément que ce problème se ramène à celui-ci :

Étant donnés deux points A et B correspondant à des valeurs a et b de x, étant donnée de plus, parmi les racines de l'équation

$$f(a, y) = 0,$$

celle qu'on regarde comme la valeur initiale de y, assigner, parmi les racines de l'équation

$$f(b, y) = 0,$$

celle qui est la valeur finale de y, en supposant connu le chemin par lequel le point mobile correspondant à la variable x est allé de A en B.

La solution générale de ce problème dépasse sans doute les forces actuelles de l'Analyse, et les procédés qu'on peut imaginer pour le traiter ne sont pratiquement applicables qu'à des équations d'une

---

[*] Dans le préambule de son travail, M. Marie signale plusieurs auteurs comme n'ayant pas connu la vraie limite de la région de convergence; à notre avis, on peut tout au plus leur reprocher des inexactitudes de rédaction qui s'expliquent par cette circonstance, que la limitation précise de la convergence était inutile aux recherches de ces géomètres. Quant à MM. Briot et Bouquet, que M. Marie comprend dans ses critiques, nous n'avons aperçu dans leurs Ouvrages aucun passage qui y donnât prise.

simplicité exceptionnelle. La méthode que M. Marie propose de suivre, et qu'il a effectivement appliquée à plusieurs exemples, repose sur un mode de représentation des imaginaires qui lui est propre et qui consiste à considérer les valeurs

$$x = \alpha + \beta i, \quad y = \alpha' + \beta' i,$$

satisfaisant à l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

comme répondant à un point réel, ayant $\alpha + \beta$ pour abscisse et $\alpha' + \beta'$ pour ordonnée. Il arrive ainsi à représenter la marche des solutions imaginaires d'une équation

$$f(x, y) = 0,$$

à l'aide d'une suite de courbes réelles auxquelles il donne le nom de *conjuguées*. Il fait connaître diverses propriétés de ces lignes, et c'est par une discussion fondée sur leur forme et leur situation qu'il cherche à établir la correspondance entre les valeurs initiale et finale de la fonction.

Vos Commissaires n'ont vu là ni une solution complète du problème, ni un moyen de l'aborder plus facilement : quelques-uns des exemples particuliers auxquels l'auteur applique sa méthode ont été traités par l'un de nous à l'aide du mode de représentation ordinaire de la variable x, et il nous a semblé qu'on arrivait ainsi plus simplement et plus naturellement au but.

Pour justifier notre manière de voir, il faudrait entrer dans des développements qui donneraient à ce Rapport une étendue exagérée. Nous nous bornerons donc à proposer à l'Académie de remercier M. Marie de ses Communications, dans lesquelles il insiste avec raison sur des distinctions qui n'avaient pas été faites avec assez de précision, tout en déclarant que les méthodes de l'auteur ne nous paraissent pas avoir une supériorité réelle sur celles dont les géomètres ont jusqu'ici fait usage.

Note au sujet du Rapport précédent;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE.

Le Rapport qu'on vient de lire est à peu près tel que je devais m'y attendre.

En exigeant en faveur du public la rectification par leurs auteurs d'erreurs maintenues pendant vingt ans, je ne devais pas compter sur leur reconnaissance.

J'ai, il y a vingt ans, ramené l'évaluation d'une intégrale prise entre des limites imaginaires à la quadrature de courbes liées, par des relations simples et remarquables, à la courbe réelle dont la fonction placée sous le signe sommatoire représentait l'ordonnée, de façon à rétablir, entre la Géométrie et l'Analyse, l'harmonie et le concours qui avaient si puissamment aidé aux progrès de l'une et de l'autre dans les deux derniers siècles, et qui venaient d'être rompus par M. Cauchy.

La théorie des intégrales doubles avait arrêté M. Cauchy et ses disciples; je l'ai établie du même coup et par des moyens aussi simples.

J'ai, peu de temps après, abordé, avec le même succès et par les mêmes moyens, la théorie des intégrales d'ordre quelconque.

En même temps que je donnais ainsi lieu de constater l'impuissance des méthodes de Cauchy, je proposais de substituer, à des énoncés d'où ne pouvait résulter que la vérification indirecte de faits déjà connus, des propositions de Géométrie pure, donnant la démonstration et l'explication de ces faits.

Par exemple, la théorie des périodes des intégrales simples résultait d'une extension du théorème d'Apollonius $\pi a'b' \sin\theta = \pi ab$ aux courbes de tous les ordres, et la théorie des périodes des intégrales doubles résultait aussi simplement d'une extension aux surfaces courbes de tous les ordres du théorème analogue relatif aux surfaces du second degré.

Le public pouvait ainsi constater que la nouvelle méthode était plus féconde que l'ancienne et fournissait des résultats plus saisissants.

La méthode de Cauchy était fondée sur une prétendue indétermination qui affecterait la marche de la fonction y dès que la variable x prendrait une valeur à laquelle pût correspondre une valeur multiple de y. J'ai montré, en 1861, dans le *Journal de Mathématiques*: 1° que, dans tous les cas, l'indétermination, si elle devait se produire, ne résulterait que du passage de y par sa valeur multiple, et non pas du passage de x par sa valeur correspondante, de sorte que, pour légitimer les précautions prises, il faudrait au moins s'assurer que la valeur de y dont on s'occupait serait devenue égale à une autre au moment où x atteindrait sa valeur critique; 2° qu'il était impossible d'admettre l'indétermination en question lorsque les dérivées des diverses valeurs égales de y se sépareraient, à un ordre plus ou moins élevé, car les valeurs de ces dérivées ne s'échangeraient pas brusquement entre elles; 3° que la prétendue indétermination n'existait pas davantage dans les autres cas, c'est-à-dire qu'on pouvait la faire disparaître en précisant davantage.

M. Cauchy et ses disciples avaient admis que la convergence de la série de Taylor serait limitée aux valeurs de la variable pour lesquelles la fonction prendrait des valeurs égales dont les dérivées se sépareraient à un certain ordre; que, par exemple,

$$y = (x - 1)\sqrt{x + 3}$$

ne pourrait se développer par la formule de Maclaurin que de $x = 0$ à $x = 1$.

J'ai montré, en 1861, dans le *Journal de Mathématiques*, que cette opinion non-seulement était erronée, car les valeurs de la dérivée, pour $x = 1$, étant différentes, il n'y avait pas à craindre qu'elles s'échangeassent, lorsqu'on dépasserait $x = 1$, mais qu'elle renversait même toute la théorie; car si la série qui représentait y de $x = 0$ à $x = 1$ devenait divergente au delà de $x = 1$, il en serait de même de la série qui représenterait $\frac{dy}{dx}$, de sorte que la fonction $\frac{dy}{dx}$ cesserait d'être développable au delà d'un point qui ne serait pas critique pour elle.

M. Cauchy et ses disciples, qui ne représentaient que la variable et n'avaient aucun moyen de suivre la marche de la fonction, avaient

admis que le développement de la fonction serait arrêté par le point critique le plus proche du point origine. J'ai montré, en 1861, dans ce Journal, que cette opinion, inadmissible en principe, car toutes les fonctions qui présenteraient les mêmes points critiques se comporteraient assurément de façons différentes, était fausse en fait; car, pour qu'une valeur de x fût critique relativement à l'une des formes de la fonction y, il faudrait que cette forme de y pût atteindre la valeur critique de la fonction y, considérée dans l'ensemble de ses formes diverses, en même temps que x atteindrait sa valeur correspondante et sans que x eût dépassé cette valeur.

La question de la détermination du point d'arrêt, parmi les points critiques, se trouvant ainsi posée, je la résolvais, dans la même année 1861, relativement à divers exemples, dont l'un

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

comporte deux points critiques réels et deux imaginaires; ce à quoi nul n'avait songé dans l'école de Cauchy. Je résolvais d'ailleurs ces questions à l'aide d'une méthode pour suivre la marche de la fonction qui manquait jusque-là entièrement, M. Puiseux n'ayant proposé d'autre moyen pour traiter la question que de se servir de la série de Taylor elle-même, ce qui constituait à la fois un cercle vicieux, quant à la théorie, et une impossibilité quant à la pratique.

MM. Briot et Bouquet avaient tranché en quelques mots (un peu plus d'une page de leur livre) la question de la convergence du développement d'une fonction de plusieurs variables par la formule de Taylor, et proposé cette solution :

« Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables imaginaires x, y, z, finie, continue, monodrome et monogène, *quand* CHACUNE *des variables reste comprise dans une certaine portion du plan.* Donnons à x, y, z des accroissements h, k, l; la fonction $f(x+h, y+k, z+l)$ est finie, continue, monodrome et monogène, tant que les variables h, k, l restent comprises *respectivement* dans des cercles de rayons R, R′, R″ décrits des points x, y, z comme centres. On a donc

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + \sum_1^\infty \frac{(h\,\mathrm{D}_x f + k\,\mathrm{D}_y f + l\,\mathrm{D}_z f)^n}{1.2\ldots n},$$

série ordonnée suivant les puissances croissantes de h, k, l, et convergente dans les cercles de rayons R, R′, R″. »

C'est-à-dire qu'il y aurait un cercle de convergence pour h, un cercle de convergence pour k, et un cercle de convergence pour l.

J'ai montré, en 1861, dans le *Journal de Mathématiques*, que cette théorie était inadmissible; qu'avant de traiter la question il eût fallu au moins la poser, car le même développement pourrait être convergent ou divergent, selon la manière dont on en grouperait les termes; que, si l'on considérait le développement d'une fonction de deux variables comme une série composée des groupes de termes homogènes par rapport à $(x - x_0)$ et à $(y - y_0)$, la question, déterminée dans ce cas, que semblaient avoir voulu envisager MM. Briot et Bouquet, n'admettrait pas, bien entendu, leur solution, qui d'ailleurs ne conviendrait à aucun autre; que la limite de la région de convergence dépendrait du rapport $\frac{y - y_0}{x - x_0}$; que, par exemple,

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

se développerait sans limites, pour x et y, par la formule de Maclaurin, si x et y étaient assujettis à la condition $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{-1}$; enfin, que le lieu des points correspondant aux systèmes de valeurs de x et de y qui limiteraient la convergence ne serait autre que l'une des branches du contour apparent, par rapport au plan des x, y de la surface dont z serait la troisième coordonnée, branche qui d'ailleurs ne serait pas plus obligatoirement la plus voisine du point origine, que le point d'arrêt du développement d'une fonction d'une seule variable n'était le point critique le plus proche du point origine.

L'impuissance de l'école de Cauchy à aborder les questions relatives aux fonctions de plusieurs variables résultait déjà suffisamment d'un silence de vingt-cinq années; mais toutes les théories sont naturellement transformables les unes dans les autres, et celle que j'avais donnée des intégrales doubles et de leurs périodes pouvait être exploitée par un adversaire. Il fallait éviter ce danger. Je me décidai à effectuer moi-même la transformation.

Ce nouveau travail, qui parut en 1872 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, me donna lieu d'abord de proposer, à la place de la démonstration donnée par Cauchy et fondée sur le calcul des variations, de ce principe que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} y\,dx$ est généralement indépendante de la marche suivie par x de x_0 à x, une démonstration élémentaire capable de s'étendre à une intégrale d'ordre quelconque $\sum_n F\,dx, dy, dz, \ldots$, condition que ne remplissait pas celle de Cauchy; en second lieu, de constater, dans la théorie de Cauchy, ce nouveau vice de méthode.

J'ai déjà dit que Cauchy et ses disciples posent avant tout en principe que les valeurs critiques doivent être interdites à la variable indépendante, sous peine, pour la fonction, de devenir indéterminée; c'est de cette nécessité que résultait pour Cauchy la convenance de ces petites évolutions autour des points critiques, qui feront peut-être encore quelque temps la joie des analystes, mais qui resteront éternellement ridicules aux yeux des géomètres.

Soient $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ le chemin suivi par x. Admettons avec Cauchy que la courbe $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ ne doive passer par aucun point critique.

Puisque β est devenu une fonction déterminée de α, la seule variable indépendante sera α; de sorte que, si $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, l'intégrale $\int y\,dx$ ne sera autre que

$$\sum (\alpha' + \beta'\sqrt{-1})\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha,$$

ou

$$\int \alpha'\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha + \sqrt{-1}\int \beta'\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha,$$

α' et β' étant deux fonctions de α, définies par les trois équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$
$$\varphi(\alpha, \beta) = 0;$$

mais, par malheur, les deux intégrales

$$\int \alpha'\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha \quad \text{et} \quad \int \beta'\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{-1}\right)d\alpha,$$

prises le long d'un chemin fermé, propre à donner une période, seraient identiquement nulles séparément si $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta'}{d\alpha}$ ne prenaient pas, le long de ce chemin, des valeurs infinies, c'est-à-dire si α ne passait pas par quelques-unes de ses valeurs critiques.

De sorte que les précautions prises pour éviter une seule difficulté aboutissaient à la reproduire avec multiplication, mais en fermant alors les yeux pour ne plus l'apercevoir.

C'est dans ces conditions, c'est après avoir infligé cette série d'échecs à la méthode de mes adversaires, que j'allais me trouver en présence du principal d'entre eux au sujet de mon Mémoire de 1865, brûlé en 1870 chez M. Bertrand et refondu en 1872.

Je ne pouvais m'attendre à plus que de la justice.

Mais ai-je obtenu justice? Je ne le pense pas. Le public prononcera.

Toutefois, avant de répondre, je crois devoir extraire du Rapport les conclusions qui doivent avoir une influence utile, immédiatement réalisable, sur l'enseignement pratique.

Le Rapport consacre enfin cette affirmation, que j'ai produite il y a bientôt vingt ans, que les points multiples d'un lieu

$$f(x, y) = 0,$$

où les dérivées de y, par rapport à x, finissent par se séparer, sans devenir infinies, ne sauraient arrêter le développement de la fonction y en série, suivant la formule de Taylor.

L'opinion contraire, professée depuis vingt-six ans, allait, il est vrai, recevoir une consécration officielle, déjà formulée dans une première édition du Rapport, mais enfin j'ai pu, avec l'aide d'un des Commissaires, faire rectifier l'erreur.

La consécration de ce premier point a une grande importance, parce que la théorie élémentaire de la série de Taylor pourra maintenant être ramenée à un degré extrême de simplicité et d'évidence, tandis que la

démonstration de Cauchy, à cause des incohérences par-dessus lesquelles il fallait passer, présentait à l'esprit des difficultés vraiment infranchissables.

En effet, on ne pouvait admettre que la convergence de la série pût être arrêtée en un point multiple où les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, par exemple, seraient différentes, sans faire violence à la notion la plus élémentaire de la continuité; pour qu'une fonction varie d'une manière continue, il ne suffit pas, en effet, que ses valeurs n'éprouvent pas de variations brusques, il faut encore que toutes les dérivées de cette fonction, par rapport à la variable indépendante, varient aussi d'une manière continue.

Il n'y a pas continuité entre les branches de la courbe

$$y = x\sqrt{\frac{x-a}{x+a}},$$

qui se croisent à l'origine.

Il n'y a pas continuité entre deux arcs d'un cercle et d'une ellipse qui se raccordent par une tangente commune.

Il n'y a pas continuité entre deux arcs d'une ellipse et d'une parabole qui se raccordent par une tangente commune et une courbure commune au point commun.

Il n'y a pas continuité entre deux arcs de courbes distinctes qui ont même ellipse osculatrice au point où elles se raccordent, etc.

La démonstration de Cauchy était fondée sur cette observation que, si la série pouvait rester convergente au delà d'un point multiple, elle devrait fournir les ordonnées des différents arcs de la courbe qui émergeraient de ce point multiple. Mais la série n'aurait été astreinte à fournir ces diverses ordonnées que s'il y avait eu continuité entre elles, ce qui n'était pas.

Cauchy ni ses disciples ne s'étaient pas même fait cette objection bien simple, et qui eût dû les confondre, que si la série devenait divergente pour ne pas représenter les ordonnées des diverses branches de la courbe qui, partant du point multiple, s'éloigneraient du point origine, elle n'en aurait pas moins accompli auparavant le tour de force de fournir les ordonnées des branches qui seraient allées concourir à ce point multiple.

D'un autre côté, le mot *divergente* prenait un sens tout nouveau, il devenait synonyme de *capricante*.

La solution que j'ai donnée, en 1861, de ces difficultés, dans le *Journal de Mathématiques*, est bien simple : les valeurs supposées distinctes de la dérivée de la fonction ne pouvant pas s'échanger au delà du point multiple, les valeurs de la fonction ne s'échangeront pas non plus, et chaque valeur de la fonction ressortira sous le coefficient différentiel sous lequel elle sera entrée.

Ce principe étant enfin consacré, la théorie élémentaire de la série de Taylor pourra maintenant se réduire à ces quelques énoncés, assez évidents pour n'exiger aucune démonstration en règle.

1. Une série à termes imaginaires est la somme de la série des parties réelles de ses termes et du produit par $\sqrt{-1}$ de la série de leurs parties affectées du signe imaginaire.

Pour que la série proposée soit convergente, il faut que les deux séries qui la composent soient elles-mêmes convergentes.

2. Si le terme général de la série proposée est $a_n + b_n\sqrt{-1}$, il faut, pour que la série soit convergente, que a_n et b_n tendent séparément vers zéro, ce qui s'exprime par cette condition, en apparence simple, mais double en réalité, que $\sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ tende vers zéro.

3. Si $\frac{a_n}{a_{n-p}}$ et $\frac{b_n}{b_{n-q}}$, p et q étant constants ou variables, mais finis, ont séparément des limites moindres que 1 en valeur absolue, la série est convergente; si l'une seulement des limites des rapports précédents dépasse 1 en valeur absolue, la série est divergente. Si l'un des rapports précédents a pour limite 1, la convergence est douteuse.

4. Si la série est ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable x, le module du terme général dépend du module de x, et tend vers zéro ou vers l'infini, suivant que le module de x est inférieur ou supérieur au module de la valeur de x qui satisfait à l'équation

$$\lim \frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{(a_{n-p})^2 + (b_{n-q})^2} = 1.$$

5. Le cas où la convergence est douteuse étant écarté, on obtiendrait, par rapport à x, l'intervalle dans lequel la série est convergente en résolvant l'équation

$$\lim \frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{(a_{n-p})^2 + (b_{n-q})^2} = 1.$$

Les valeurs de x, dont le module serait moindre que celui de la valeur trouvée, seront celles pour lesquelles la série sera convergente. La question, en ce qui concerne le développement d'une fonction implicite, est de trouver dans la discussion de l'équation $f(x, y) = 0$, qui définit cette fonction, les éléments de la détermination, par rapport à x, de la limite en question.

6. Si x_0 et y_0 sont les valeurs initiales de x et de y, et que y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, ..., soient finies, y se confond, dans une étendue plus ou moins grande, avec

$$y_0 + \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{12} + \ldots,$$

en ce sens que les deux lieux

$$f(x, y) = 0$$

et

$$y = y_0 + \left(\frac{dx}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \ldots$$

ont en $(x_0 y_0)$ un contact d'ordre infini, à l'intimité duquel aucune autre condition nouvelle ne saurait être ajoutée.

7. Si la valeur de y, que représentait la série lorsqu'elle était convergente, doit devenir infinie pour une certaine valeur x_1 de x, la série, pour continuer de représenter cette valeur de y, doit prendre des valeurs de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de x_1, devenir infinie pour $x = x_1$, et être divergente pour toute valeur de x, telle que le module de $x - x_0$ surpasse celui de $x_1 - x_0$.

8. Mais il n'est pas nécessaire que la fonction y, représentée par la

série, doive devenir infinie pour une valeur x_1 de x pour que la série devienne divergente dès que le module de $x - x_0$ surpasserait celui de $x_1 - x_0$.

En effet une série, ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, est convergente ou divergente en même temps que toutes ses dérivées et intégrales, puisque le rapport du module d'un terme au module du terme précédent ne change, dans la série dérivée ou dans la série intégrale, que dans le rapport des rangs de deux termes consécutifs, lequel tend vers 1.

9. La série doit donc être divergente pour toute valeur de x telle, que le module de $x - x_0$ surpasse celui de la différence entre x_0 et une valeur x_1, telle que l'une des dérivées de la fonction devienne infinie.

10. Une valeur de la variable, qui rend infinie une des valeurs de la fonction qui en dépend, rend en même temps infinies toutes les dérivées de cette forme de la fonction; mais les dérivées d'une fonction peuvent ne devenir infinies qu'à partir d'un ordre plus ou moins élevé.

11. Toutefois, comme la dérivée d'une fonction ne peut devenir infinie qu'autant que cette fonction prenne au moins deux valeurs égales, on obtiendra tous les points qui pourraient arrêter la convergence de la série en résolvant le système des deux équations

$$f(x, y) = 0,$$
$$\frac{df}{dy} = 0.$$

12. Pour reconnaître si une valeur de x, à laquelle correspondent p valeurs égales de y, peut être ou non considérée comme pouvant éventuellement former la limite de la région de convergence de la série, il faudra prendre les dérivées des p valeurs de y. Si ces p valeurs sont finies et inégales, la valeur de x ne sera pas critique. Si $p - q$, valeurs de $\frac{dy}{dx}$ se trouvent confondues, il faudra prendre les $p - q$ valeurs correspondantes de $\frac{d^2y}{dx^2}$; si ces $p - q$ valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont toutes finies

et inégales, la valeur de x ne sera pas critique. Si $p-q-r$ valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ restent confondues, il faudra prendre les $p-q-r$ valeurs correspondantes de $\frac{d^3y}{dx^3}$; si ces $p-q-r$ valeurs de $\frac{d^3y}{dx^3}$ sont toutes finies et inégales, la valeur de x ne sera pas critique, et ainsi de suite. Si $p-q-r\ldots-t$ valeurs de $\frac{d^ny}{dx^n}$ deviennent infinies, les formes correspondantes de y ne seront pas développables au delà de la valeur considérée de x; mais celles dont les dérivées se seront déjà séparées le resteront. Quant à celles dont les dérivées de l'ordre n ne seraient pas devenues infinies, mais ne se seraient pas encore séparées, il faudra les dériver de nouveau, jusqu'à ce que l'on tombe finalement sur des dérivées distinctes ou infinies.

Tel est le degré de simplicité auquel peut être ramenée maintenant la théorie de la série de Taylor, en tant du moins qu'on écarte provisoirement la question de la détermination du point d'arrêt.

Avant d'aller plus loin, je rappellerai, à l'occasion de ce qui précède, ce que j'ai déjà dit, il y a douze ans, dans ce Journal, après avoir été averti du fait par M. Liouville, que MM. Lamarle et Tchebychef, envers qui les disciples de Cauchy n'ont pas été plus justes qu'envers moi, si du moins ils les avaient compris, m'avaient devancé dans mes observations relatives aux points multiples : M. Lamarle, en observant que, pour qu'un point dit *critique* pût être point d'arrêt, il faudrait au moins que les valeurs de y qui s'y confondraient pussent s'échanger dans un rayon infiniment petit ; M. Tchebychef, en démontrant en quatre mots que la série ne pouvait devenir divergente qu'au delà d'un point où l'une des dérivées de la fonction deviendrait infinie.

Je prie maintenant qu'on me permette quelques observations sur le Rapport lui-même.

On a sans doute remarqué la démonstration, extraite de son propre Mémoire, que M. Puiseux donne dans ce Rapport, de ce fait que les points multiples du lieu $f(x, y) = 0$ où les dérivées des y par rapport à x finissent par se séparer, sans devenir infinies, ne doivent plus être considérés comme critiques.

Je connaissais cette contradiction, mais j'en avais tiré autrefois une

conclusion bien différente de celle que la citation rétrospective que je signale semblerait destinée à suggérer : sachant que les valeurs d'une fonction qui pouvaient se permuter dans un rayon infiniment petit autour d'un point multiple étaient seulement celles dont les dérivées devenaient infinies au même ordre, j'en avais conclu que M. Puiseux s'était peut-être inutilement donné la peine d'établir la théorie de ces permutations, les groupes de racines qui devaient se permuter circulairement étant d'avance connus.

J'ai écrit, en effet, dans le tome VI, 2e Série, du *Journal de Mathématiques* :

« Ainsi les formes de la fonction qui peuvent se permuter entre elles autour d'un point multiple sont celles dont les dérivées deviennent infinies au même ordre, après être restées confondues jusqu'à l'ordre précédent.

» Ce sont là sans doute les groupes circulaires que le calcul direct avait révélés à M. Puiseux ; en les définissant comme on vient de le faire, il devient superflu de les déterminer à l'avance : on les retrouvera toujours sans difficulté. »

Je passe à la seconde partie du Rapport.

Voici d'abord les termes dont je me suis servi dans le préambule de mon Mémoire :

« J'ai établi en même temps l'inexactitude de la règle donnée par Cauchy et adoptée depuis *explicitement* ou *implicitement* par tous les géomètres qui ont écrit sur la matière, d'après laquelle le cercle de convergence passerait par le point critique le plus voisin du point origine. »

Il semble que non-seulement cette assertion n'avait rien de blessant pour personne, mais que même j'étais resté dans les limites d'une extrême circonspection en ne désignant en particulier aucun des géomètres qui m'avaient précédé, comme s'étant exprimé sur le point en question d'une façon absolument explicite. D'ailleurs je ne faisais que rappeler un fait de notoriété publique et qui n'eût donné lieu de ma part à aucune insistance, si le Rapport n'avait pas jeté un certain doute sur leur exactitude.

Mais, puisqu'on m'y oblige, j'apporterai les preuves de ce que j'ai avancé. Elles m'étaient bien connues, puisque j'ai pu citer de

mémoire les textes à M. Puiseux avant de les lui montrer imprimés.

M. Puiseux dit, à la page 378 du tome XV, 1850, du *Journal de Mathématiques :*

« L'existence de ce développement une fois démontrée, on pourra en calculer les coefficients par le théorème de Taylor, qui donnera

$$\varphi(\gamma) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1}(\gamma - c) + \frac{\varphi''(c)}{1.2}(\gamma - c)^2 + \ldots.$$

On a, dans cette équation,

$$\varphi(c) = b_1.$$

Si, de plus, on appelle $F_1(u, z)$, $F_2(u, z)$,... les valeurs de $1\frac{du}{dz}$, $1.2\frac{d^2u}{dz^2}$,..., tirées des équations

$$\frac{df}{du}\frac{du}{dz} + \frac{df}{dz} = 0,$$

$$\frac{df}{du}\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2f}{du^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{du\,dz}\frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2} + \ldots = 0,$$

les quantités $\frac{\varphi'(c)}{1}$, $\frac{\varphi''(c)}{1.2}$,... auront pour valeurs $F_1(b_1, c)$, $F_2(b_1, c)$,..., et il en résultera

$$(F) \qquad \varphi(\gamma) = b_1 + F_1(b_1, c)(\gamma - c) + F_2(b_1, c)(\gamma - c)^2 + \ldots.$$

» On voit clairement, par ce qui précède, quelle est celle des racines de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

dont la formule (F) donne le développement ; la série qui en est le second membre fournit la valeur pour $z = \gamma$ de celle des racines qui, se réduisant à b_1 pour $z = c$, varie d'une manière continue avec z, en supposant que le point Z aille de C en Γ, sans sortir du cercle σ, c'est-à-dire en supposant que la distance CZ reste toujours moindre que la plus petite des distances CA, CA′, CA″,....

» *La formule ne peut s'appliquer qu'aux valeurs de γ telles, que le*

module de $\gamma - c$ soit inférieur à cette plus petite distance; la notation $\varphi(\gamma)$ n'a même un sens déterminé qu'à cette condition. »

J'aime trop la justice pour ne pas proclamer moi-même que tout ce passage est écrit d'un style ferme, net, clair, correct, précis, élégant même, et qu'il faudrait être mal intentionné pour y trouver le moindre vice de rédaction.

Quant à l'exemple auquel M. Puiseux fait allusion, le voici :

Il s'agit de la fonction y définie par l'équation

$$y^3 - 3y + x = 0$$

avec la valeur initiale $y_0 = -2$ correspondant à $x_0 = +2$. M. Puiseux dit que la fonction y pourra se développer de $x = +2$ à $x = -2$.

Cet exemple ne prouve rien, parce que, la valeur initiale de la variable étant une valeur critique et la valeur correspondante de la fonction une valeur finie et simple, il était certain d'avance que, si la variable revenait à sa valeur critique initiale, sans avoir atteint et dépassé l'autre valeur critique, la fonction reviendrait à sa valeur initiale.

Si la valeur initiale choisie avait été infiniment peu différente de la valeur critique considérée, M. Puiseux, en vertu du théorème général qu'il avait établi, aurait dû conclure à un rayon de convergence infiniment petit. Cette conclusion eût sans doute été absurde comme contraire à la notion de continuité; mais qu'y puis-je faire? M. Puiseux, en admettant les points multiples au nombre des points critiques, n'avait-il pas déjà démontré que la notion de continuité n'a rien à voir avec les théories de Cauchy?

Quant à MM. Briot et Bouquet, voici l'énoncé qu'ils donnent, page 26 de leur Ouvrage, du théorème de Cauchy.

« Pour qu'une fonction soit développable en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de la variable, et convergente dans un cercle décrit de l'origine comme centre, *il est nécessaire* et il suffit que la fonction soit synectique, c'est-à-dire soit finie, continue, monodrome et monogène, dans ce même cercle. »

Pour rendre leur idée encore plus claire, MM. Briot et Bouquet ajoutent, page 29 :

« Soit la fonction irrationnelle

$$\sqrt{1+z}$$

comptée à partir de $z = 0$ avec la valeur initiale $+1$. Nous avons vu que cette fonction cesse d'être monodrome quand on tourne autour du point $z = -1$; elle sera donc développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de z, dans le cercle décrit de l'origine comme centre, avec un rayon égal à l'unité.

» Il en sera de même d'une fonction implicite u définie par une équation algébrique entre u et z et comptée à partir du point z (probablement z_0) avec la valeur initiale u_0. Si du point z_0 comme centre, *avec un rayon égal à la distance au point le plus proche pour lequel l'équation a des racines égales, et la fonction cesse d'être monodrome*, on décrit un cercle, la fonction sera développable dans ce cercle en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - z_0$. »

Le sens de ce passage est bien clair : MM. Briot et Bouquet ont voulu dire que la fonction qui partirait de la valeur u_0 correspondant à z_0 serait développable dans le cercle dont la circonférence passerait par le point critique du lieu le plus proche du point z_0. C'est là évidemment ce que tout le monde comprendra en lisant leur énoncé, et, en fait, ce que tout le monde a compris jusqu'à ce jour.

Mais MM. Briot et Bouquet veulent que ce ne soit pas là le sens de leur énoncé. Ils disent : ce que nous appelons la *fonction*, aussi bien dans la première partie de l'énoncé que dans la seconde, c'est la valeur de la fonction multiple u qui est partie de la valeur u_0 correspondant à $z = z_0$, et qui a varié d'une manière continue avec z.

Mais, d'abord, il est évident que, dans l'hypothèse qu'ils veulent faire admettre, MM. Briot et Bouquet eussent formulé leur première phrase en ces termes : pour qu'une fonction soit développable, etc., il est nécessaire et il suffit que *cette* fonction, etc.; ils n'auraient pas dit : il est nécessaire et il suffit que *la* fonction, etc.

En second lieu, comment MM. Briot et Bouquet interpréteraient-ils, dans la même hypothèse, les mots : si du point z_0 comme centre, avec un rayon égal à la distance au point le plus proche *pour lequel l'équa-*

tion a des racines égales, etc.? Il ne s'agit plus là de la valeur de la fonction qui est partie de la valeur u_0.

Mais ces contradictions ne sont rien encore : dans l'hypothèse que voudraient faire admettre MM. Briot et Bouquet, leur énoncé n'aurait plus que ce sens : « Dès que la fonction qui est partie de la valeur u_0 aura pu prendre deux valeurs distinctes, elle ne sera plus représentée par la série, qui n'en a qu'une ». MM. Briot et Bouquet auraient-ils écrit vingt-neuf pages pour aboutir à ce résultat?

Enfin quel non-sens n'eût-ce pas été, en 1859, de parler du premier point où la fonction partie de u_0 aurait pu prendre deux valeurs, quand on ne pouvait suivre les variations de cette fonction, dans un intervalle si restreint qu'on le supposât.

Je passe à la troisième partie du Rapport.

Je ne m'arrête pas à cette phrase : « On voit aisément que le problème se ramène à celui-ci : Etant donnés deux points A et B, etc. ». Je remercie M. Puiseux de vouloir bien constater que j'ai démontré le fait assez clairement pour m'être fait comprendre.

Je laisse aussi de côté cette insinuation, que je ne me serais attaqué qu'à *des équations d'une simplicité exceptionnelle.* L'équation du folium $y^3 - 3axy + x^3 = 0$ suffisait amplement pour montrer que la méthode proposée par moi existait réellement, et il faudrait avoir beaucoup de temps à perdre pour s'amuser à en traiter de plus compliquées.

Je ne dirai rien non plus de cette opinion du rapporteur, que la solution du problème dépasse les forces actuelles de l'Analyse, alors qu'elle a été ramenée à la discussion de courbes algébriques.

J'arrive à la plus grave des questions que soulève le Rapport.

C'est en 1861 que j'ai développé, dans le *Journal de Mathématiques,* ma méthode pour déterminer le point d'arrêt parmi les points critiques. C'est en 1861 que j'ai appliqué cette méthode à l'équation du folium. Depuis 1861, MM. Briot et Bouquet, c'était leur droit, ont essayé de résoudre la même question; ils y ont réussi, à ce qu'il paraît. La solution qu'ils vont proposer est déjà imprimée, en ce sens qu'ils l'ont en *épreuves;* elle sera exacte, je l'admets sans difficulté. Sera-t-elle meilleure que la mienne? C'est ce que le public pourra voir quand elle lui sera offerte; mais devait-elle être mise en parallèle avec

la mienne? Le rapporteur de la Commission chargée d'examiner mon Mémoire ne devait-il pas se borner à constater le progrès accompli par moi.

M. Puiseux dit : « Pour justifier notre manière de voir, il faudrait entrer dans des développements qui donneraient à ce Rapport une étendue exagérée ». L'Académie pensera, je n'en doute pas, qu'*avant de lui soumettre les conclusions de son Rapport, M. Puiseux eût dû poser la question dans des termes moins équivoques, et qu'il eût peut-être bien fait de s'abstenir provisoirement de développements qui trouveront mieux leur emploi lorsque MM. Briot et Bouquet auront publié la méthode qu'ils ont imaginée.*

Quant à l'aide du mode de représentation ordinaire de la variable x prétendue, on comprendra parfaitement que, pour résoudre une question de l'ordre de celle dont il s'agit, il faut une méthode, et que cette méthode ne peut pas plus consister à porter $b\sqrt{-1}$ perpendiculairement à a, qu'à le porter à la suite, ou sous toute autre inclinaison; en d'autres termes, qu'un mode de représentation ne constitue pas un moyen de solution.

Il n'existait jusqu'ici que deux méthodes pour suivre la marche continue d'une fonction : celle qu'on peut tirer de la proposition faite autrefois par M. Puiseux, de se servir pour cela du développement même de la fonction par la série de Taylor, et celle que j'avais adaptée à la recherche du point d'arrêt, laquelle était soumise à l'Académie.

Il en existe maintenant paraît-il une troisième, celle que MM. Briot et Bouquet vont publier.

M. Puiseux s'est fait expliquer cette troisième méthode, il en avait sans doute le droit, mais devait-il la faire entrer en balance? devait-il proposer à la sanction de l'Académie un jugement contradictoire entre les deux méthodes? devait-il laisser ignorer à l'Académie qu'il visait *in petto* une méthode encore inconnue? devait-il enfin laisser supposer que, pour faire ce que j'avais fait, il pût suffire de *l'aide du mode de représentation ordinaire de la variable x?*

Je crois que l'Académie informée ne le pensera pas.

Détermination immédiate, par le principe de correspondance, du nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXV, p. 736, séance du 30 septembre 1872.)

Cette question n'est autre que celle de déterminer, en Algèbre, le nombre des solutions de deux équations à deux inconnues; ce qui exige des calculs parfois compliqués. Les considérations géométriques auxquelles se prête le principe de correspondance (qui s'applique de même directement à la question algébrique) évitent ces calculs et conduisent à une expression fort simple du nombre cherché.

Il suffit de démontrer d'abord ce théorème fondamental de la Géométrie analytique, que le nombre des points, réels ou imaginaires, communs à deux courbes géométriques quelconques d'ordre p et p', est toujours pp'. C'est à la démonstration immédiate de ce théorème, qui a offert pendant longtemps des difficultés [*], que se prête le principe de correspondance (de deux manières); et même la simple définition des courbes géométriques d'être rencontrées toujours en un

[*] « La vérité de cette proposition, disait Euler, est reconnue de tous les géomètres, quoiqu'on doive avouer qu'on n'en trouve nulle part une démonstration assez rigoureuse. » (Voir *Mémoires de l'Académie de Berlin*, de 1748; *Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper*, p. 233-248). Cramer dit bientôt après : « La règle qui détermine ce nombre est très-importante dans la théorie des courbes ; plusieurs grands géomètres l'ont supposée, mais personne, que je sache, n'en a donné la démonstration. » (*Introduction à l'analyse des courbes algébriques;* Genève, 1750, p. XIII.)

même nombre de points, réels ou imaginaires, par une droite quelconque, suffit, sans qu'on ait à se servir des équations des courbes.

THÉORÈME I. — *Deux courbes d'ordre* p *et* p' *ont toujours* pp' *points communs, réels ou imaginaires.*

Prenons deux points fixes quelconques, I et O. Une droite IX rencontre la première courbe en p points α; les droites menées de ces points au point O rencontrent la deuxième courbe en pp' points α'; par ceux-ci on mène pp' droites IU. Ces pp' droites correspondent à IX. De même, à une droite IU, qui rencontre la deuxième courbe en p' points, correspondent $p'p$ droites IX. Il existe donc $2pp'$ droites IX qui coïncident chacune avec une droite correspondante IU. pp' de ces droites sont coïncidentes avec la droite IO, et n'appartiennent pas à des points communs aux deux courbes; mais chacune des pp' autres droites passe par un point α de la première courbe coïncidant nécessairement avec un des points α' de la deuxième courbe situés sur la droite αO. Le théorème est donc démontré.

Les points multiples et les points de contact que peuvent avoir les deux courbes ne modifient en rien la démonstration; de sorte que le résultat pp' est général.

Observation. — Si les deux courbes avaient un point commun sur la droite IO, ce point servirait, comme les autres, à former le nombre pp' des solutions étrangères; mais, néanmoins, il compterait aussi dans le nombre des points d'intersection des deux courbes; car une droite IX, infiniment voisine de IO, donnerait lieu alors à une droite correspondante IU, infiniment peu différente de IX, et conséquemment faisant, à la limite, une coïncidence. Mais, du reste, on peut prendre les deux points I, O sur une droite qui ne passe pas par un point commun aux deux courbes : ce qui justifie notre raisonnement.

THÉORÈME II. — *Lorsque deux courbes d'ordre* p *et* p' *sont représentées par les deux équations*

$$(x^m, y^n)^p = 0, \quad (x^{m'}, y^{n'})^{p'} = 0$$

de degré p *et* p', *dans lesquelles les puissances supérieures de* x *et* y *sont* m, n *et* m', n', *le nombre de leurs points d'intersection, situés à*

distance finie, est

$$pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') - \omega,$$

ω étant le nombre des points d'intersection des deux courbes qui peuvent se trouver à l'infini, autres que ceux qui s'y trouvent sur les axes coordonnés, en nombre $(\mathrm{p} - \mathrm{m})(\mathrm{p}' - \mathrm{m}') + (\mathrm{p} - \mathrm{n})(\mathrm{p}' - \mathrm{n}')$.

Démonstration. — Le nombre total des points d'intersection des deux courbes étant pp' (théorème I), il suffit d'en retrancher leurs points communs situés à l'infini. Au nombre de ces points s'en trouvent évidemment $(p - n)(p' - n')$ sur l'axe Ox, et $(p - m)(p' - m')$ sur l'axe Oy. Donc, si les deux courbes ont à l'infini ω autres points communs, le nombre de leurs points à distance finie se réduit à

$$pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') - \omega \text{ [*]}.$$

C. Q. F. D.

La question se réduit donc à déterminer le nombre ω des points communs aux deux courbes, qui peuvent se trouver sur la droite de l'infini, autres que ceux qui sont représentés par

$$[(p - m)(p' - m') + (p - n)(p' - n')].$$

Or cela se fait sans difficulté. L'équation de chaque courbe fait connaître, par une équation en $\frac{y}{x}$ qu'on pose immédiatement, le nombre et la direction des points de la courbe qui se trouvent à l'infini, ainsi

---

[*] L'expression incomplète $pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n')$ a été donnée par Bezout dans sa *Théorie générale des équations algébriques*, 1769. Il dit que, si $p = m$ et $p' = m'$, elle devient $pp' - (p - n)(p' - n')$, et que c'est là le cas où se réduit tout ce qu'on a su jusqu'alors (*voir* p. 45). Néanmoins on cite constamment le terme pp' comme constituant le théorème de Bezout, c'est-à-dire la limite du degré de l'équation finale résultant de l'élimination d'une inconnue, qu'il aurait donnée, quand, en réalité, il a donné une limite très-inférieure, que l'on devrait citer, d'autant plus qu'il ne s'est pas borné au cas de deux équations à deux inconnues, et qu'il a traité la question dans sa généralité, ce qui constitue le grand mérite de l'Ouvrage de Bezout.

que les tangentes en ces points. Ces deux choses, les points et leurs tangentes, sont les éléments principaux de la question.

Deux points des deux courbes situés dans une même direction $\left(\text{déterminée par une même valeur de } \frac{y}{x}\right)$ sont deux points coïncidents, puisqu'ils sont à l'infini sur deux droites parallèles : ils comptent donc pour 1 dans le nombre ω. Mais si les courbes ont en ce point la même tangente, elles ont deux points communs; le point compte donc pour 2. Si l'une des courbes a un point double, il compte aussi pour 2, et de même pour les points multiples d'ordre supérieur. Si les deux courbes ont une tangente commune en leurs points multiples coïncidents, cette tangente ajoute une unité au produit des ordres de multiplicité.

Il peut entrer aussi dans le nombre ω des points situés sur les axes coordonnés Ox, Oy, soit que les courbes aient un contact commun avec un de ces axes en son point de l'infini, ou un contact avec la droite de l'infini elle-même, au même point.

Sans chercher à énumérer les différents cas que peuvent présenter les conditions de contact de deux courbes, je vais donner quelques exemples variés dans lesquels se trouvera toujours une vérification du résultat.

Voici l'indication du sujet de chacun de ces exemples :

I. Les deux courbes ont un point d'intersection sur la droite de l'infini : $\omega = 1$.

II. Les deux courbes ont deux points communs à l'infini, dont un est un point d'intersection et l'autre un point de contact : $\omega = 1 + 2 = 3$.

II *bis*. Les deux courbes ont deux points de contact à l'infini : $\omega = 4$.

III. Les deux courbes ont un point de contact à l'infini, et leur tangente commune est la droite de l'infini : $\omega = 2$.

IV. Les deux courbes ont un point de contact avec la droite de l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 1$.

IV *bis*. Les deux courbes ont trois points de contact à l'infini, dont deux sont sur les axes Ox, Oy : $\omega = 2 + 1 + 1 = 4$.

V. La première courbe a un point d'inflexion à l'infini; la seconde courbe lui est tangente en ce point : $\omega = 2$.

VI. La première courbe a un point double à l'infini; la seconde courbe passe par ce point : $\omega = 2$.

VII. La première courbe a un point double à l'infini; la seconde courbe passe par ce point et est tangente à l'une des deux branches : $\omega = 3$.

VIII. Les deux courbes ont chacune un point double en un même point de l'infini, et ont les mêmes tangentes en ce point : $\omega = 6$.

IX. La première courbe a un point triple et la seconde un point double en un même point de l'infini; les deux courbes ont deux tangentes communes en ce point; en outre, elles ont un autre point de contact à l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 8 + 1 = 9$.

X. Exemples pris du Mémoire de M. Minding : $\omega = 0$.

XI. Du même : $\omega = 0$.

XII. Autre exemple de M. Minding où $\omega = 1 + 2 = 3$.

Exemples. — Faisons

$$N = pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n');$$

le nombre cherché sera $N - \omega$.

Soient les courbes :

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} y^3 - 2y^2x + yx - 1 &= 0, \\ y^2 - 2yx - y - 2x + 2 &= 0. \end{aligned}$$

$N = 6 - 2 = 4$. Les courbes ont un point commun à l'infini dans la direction de la droite $y = 2x$. Leurs tangentes en ce point ne coïncident pas; ainsi $\omega = 1$, et $N - \omega = 3$. Les deux courbes ont donc trois points d'intersection à distance finie. Effectivement l'équation finale en y est $5y^3 - 3y^2 - 2 = 0$.

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} y^3 - 7xy^2 + 14x^2y - 8x^3 + 7y^2 - 30xy \\ + 20x^2 + 7y + 13x - 15 = 0. \\ y^2 - 6xy + 8x^2 + 4y - 12x + 5 = 0. \end{aligned}$$

$N = 6$. Les courbes ont deux points communs à l'infini, dans les directions des droites $y = 2x$, $y = 4x$; le premier est un point d'in-

tersection, et le second un point de contact du premier ordre; la tangente commune a pour équation $y = 4x - 2$; donc $\omega = 1 + 2$, et $N = 3$. Donc les courbes ont trois points d'intersection à distance finie, ce qui s'accorde avec le résultat de M. Magnus, de qui cet exemple est emprunté (*Journal de Crelle*, 1843; t. XXVI, p. 366; *Zur Eliminationstheorie*).

II *bis*.
$$2y^3 - 2x^2y + y^2 - 2xy + 3x^2 = 0.$$
$$y^3 - x^2y + 3y^2 - xy - x^2 = 0.$$

$N = 9 - 1 = 8$. Les deux courbes ont deux points de contact à l'infini; leurs tangentes en ces points ont pour équations $y = x - \frac{1}{2}$, $y = -x - \frac{3}{2}$. Donc $\omega = 4$; $N - 4 = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points communs à distance finie; ces quatre points coïncident à l'origine des coordonnées où les courbes ont chacune un point double.

III.
$$x^3 + 2x^2y + y^3x + 3y^2 + y = 0.$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0.$$

$N = 6$. Les deux courbes ont un point de contact à l'infini, dans la direction de la droite $y = -x$; leur tangente en ce point est la droite de l'infini : $\omega = 2$ et $N - \omega = 4$. Les courbes ont donc quatre points d'intersection à distance finie. L'un est l'origine des coordonnées; les trois autres sont déterminés par l'équation $y^3 + 6y^2 + 6y + 1 = 0$.

III *bis*.
$$y^2x - 2y^2 + 3xy + x^2 = 0.$$
$$y^2 - x + 0.$$

$N = 6 - 1 = 5$. Les deux courbes ont un point de contact avec la droite de l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 1$, $N - 1 = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points d'intersection à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la cubique a un point double; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $2y^2 + 3y - 2 = 0$.

IV. $$y^2x - 2yx^2 + 2y + x = 0.$$
$$2y^2x - 4yx^2 + y + 3x = 0.$$

$N = 9 - 2 = 7$. Les deux courbes ont trois tangentes communes en trois points de l'infini; l'une est la droite $y = 2x$, et les deux autres sont les axes Ox, Oy : $\omega = 2 + 1 + 1 = 4$. Les courbes ont donc $N - 4 = 3$ points d'intersection à distance finie. L'un de ces points est en O; les deux autres sont déterminés par les équations finales $3y^2 - 1 = 0$, $x^2 - 3 = 0$.

V. $$y^3 + x^3 - 3ayx = 0.$$
$$y^2 + yx + ax = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point d'inflexion à l'infini dans la direction de la droite $y = -x$; la tangente en ce point a pour équation $y = -x - a$. La seconde courbe passe par le même point et a la même tangente. Donc $\omega = 2$ et $N - \omega = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points d'intersection à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la première courbe a un point double; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $2x^2 - 3ax + 16a^2 = 0$.

VI. $$y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 + y^2 - x^2 + 3y - x = 0.$$
$$y^2 - 3yx + 2x^2 + y = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point double à l'infini, dans la direction de la droite $y = x$: les tangentes en ce point sont la droite $y = x - 1$ et la droite de l'infini. La deuxième courbe passe par le même point, et sa tangente est la droite $y = x + 1$. Les deux courbes ont donc deux points communs : $\omega = 2$, $N - \omega = 4$. Les courbes ont quatre points d'intersection à distance finie, dont un est l'origine des coordonnées, et les trois autres sont déterminés par l'équation $4x^2 - 3x^2 + 12x + 3 = 0$.

VII. $$y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 + y^2 - x^2 - 3y + x = 0.$$
$$y^2 - 3yx + 2x^2 + y = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point double à l'infini dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point sont la droite de l'infini et la droite $y = x + 1$. La deuxième courbe passe par ce point et a la même tangente, ce qui fait trois points communs aux deux courbes; ainsi $\omega = 3$, $N - \omega = 6 - 3 = 3$, et les courbes ont trois points d'intersection à distance finie. L'un de ces points est l'origine des coordonnées; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $3x^2 - 7x + 3 = 0$.

VIII. $$y^2x - 2x^2y + x^3 + y^2 - 5xy + 4x^2 + 2y = 0.$$
$$2y^2x - 4x^2y + 2x^3 - y^2 + 5x^2 + 4y = 0.$$

$N = 9 - 1 = 8$. Les deux courbes ont chacune un point double en un même point de l'infini, dans la direction de la droite $y = x$, et ont les mêmes tangentes en ce point, lesquelles ont pour équations

$$y = x + 1, \quad y = x + 2.$$

Ce qui fait six points communs à l'infini : $\omega = 6$ et $N - \omega = 2$. Ainsi les deux courbes n'ont que deux points d'intersection à distance finie. Ces points sont à l'origine des coordonnées, où les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox.

IX. $$x(y - x)^3 - (3y + 4x)(y - x) + 6y = 0,$$
$$x(y - x)^2 - 3x(y - x) + 2y = 0.$$

$N = 12 - 1 = 11$. La première courbe a un point triple à l'infini, dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point ont pour équations

$$y = x + 1, \quad y = x + 2, \quad y = x + 3.$$

La courbe est tangente à l'axe Oy, à l'infini.

La deuxième courbe est aussi tangente à cet axe en ce point, et a un point double coïncidant avec le point triple de la première; en outre, ses deux branches sont tangentes à deux branches de celle-ci : ce qui fait huit points communs aux deux courbes, et un neuvième

au point de contact sur l'axe Oy; ainsi $\omega = 9$ et $N - \omega = 2$. Les courbes n'ont donc que deux points communs à distance finie. Ces deux points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox.

X. $(x, 2)y^4 + (x, 4)y^2 + (x, 5)y + (x, 2)y^3 + (x, 5) = 0.$

$(x, 8)y^5 + (x, 9)y^3 + (x, 6)y^4 + (x, 4)y^2 + (x, 3)y + (x, 4) = 0.$

(x, α) désigne un polynôme quelconque en x du degré α [*]. On ne peut déterminer que N. On a $N = 6.13 - 1.4 - 2.8 = 78 - 20 = 58$, quels que soient les polynômes; ce qui s'accorde avec la formule de M. Minding, qui donne

$$4.8 + \frac{11}{2} + \frac{11}{2} + 5 + 5 + 5 = 4.8 + 11 + 15 = 58.$$

La première courbe a trois points à l'infini, autres que les trois qui s'y trouvent aux extrémités des axes coordonnés; et la seconde courbe n'en a qu'un, lequel se trouve infiniment voisin de l'axe des x, dû à ce que la courbe est tangente en ce point à la droite de l'infini, de sorte que les deux courbes n'auront pas de points communs s'exprimant par $x = \infty$, $y = \infty$, quels que soient les polynômes multiplicateurs des puissances de y; mais elles pourront en avoir aux extrémités des axes coordonnés, s'exprimant par $y = 0$, $x = \infty$, ou bien $x = 0$, $y = \infty$, selon ce que seront les polynômes.

XI. $bx^2y^4 + ay^4 + gx^3y + exy^2 + lx^3 + cy^2 + kx^2 + h = 0.$

$\beta x^5y^2 + \mu x^2 + \delta x^2y + \gamma y + \lambda = 0.$

$N = 42 - 16 = 26$. La première courbe n'a qu'un point à l'infini, autre que les cinq qui s'y trouvent aux extrémités des deux axes coordonnés, et la seconde courbe n'en a aucun; en outre, les deux courbes n'ont pas de contact sur les axes Ox, Oy. Donc $\omega = 0$, et les deux

[*] Exemple donné par M. Minding dans son *Mémoire sur le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination* (*Journal de Crelle*, t. XXII, 1841, p. 178, reproduit dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. VI, 1841, p. 412-418).

courbes ont leurs vingt-six points d'intersection à distance finie; ce qui s'accorde avec le résultat de M. Minding.

XII. $$bx^2y^4 + gx^3y + exy^2 + fy^2 + kx^2 + h = 0.$$
$$\delta x^5y^2 + \mu x^4 + \delta x^2y + \gamma y + \lambda = 0.$$

$N = 42 - 6 - 10 = 26$. Ces équations sont les mêmes que les précédentes, où l'on a fait $a = 0$ et $l = 0$ dans la première.

La première courbe a l'axe Ox pour asymptote, et l'axe Oy pour asymptote double; en d'autres termes, la courbe a deux points à l'infini sur Ox, et trois points à l'infini sur Oy.

La seconde courbe a une asymptote double coïncidant avec Ox, et cinq asymptotes coïncidant avec Oy. Ainsi les deux courbes ont un point de contact (c'est-à-dire deux points consécutifs) à l'infini sur l'axe Ox, et un contact double (trois points consécutifs) à l'infini sur l'axe Oy; ce qui fait $\omega = 1 + 2 = 3$, $N - \omega = 23$. Ainsi les deux courbes ont vingt-trois points communs à distance finie.

Les trois points qui entrent dans ω forment trois couples de solutions des deux équations, savoir :

$$y = 0,\ x = \infty;\quad x = 0,\ y = \infty;\quad x = 0,\ y = \infty.$$

Ce résultat s'accorde avec la méthode analytique de M. Minding.

Note relative à la détermination du nombre des points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque, qui se trouvent à distance finie;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, séance du 20 janvier 1873.)

Les équations de deux courbes, de degrés p et p', étant

$$(x^m, y^n)^p = 0 \quad \text{et} \quad (x^{m'}, y^{n'})^{p'} = 0,$$

le nombre de leurs points communs situés à distance finie est

$$pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') - \omega\,[*],$$

ω étant le nombre des points communs aux deux courbes qui se trouvent sur la droite de l'infini, autres que ceux qui, situés sur cette droite et sur les axes des coordonnées, sont représentés par les deux termes $(p-m)(p'-m')$, $(p-n)(p'-n')$. Cela résulte de ce que *le nombre total des points (réels ou imaginaires) communs à deux courbes d'ordre* p *et* p' *est toujours* pp'. En donnant une première démonstration de ce théorème par le principe de correspondance, j'ai annoncé que le même raisonnement se prêtait à une seconde démonstration. C'est celle-ci qui fait le sujet de la présente Note. Cette démonstration, extrêmement simple, repose sur une seule propriété des courbes géométriques, savoir : que le nombre des tangentes, réelles ou imaginaires, qu'on peut mener par un point à une courbe, est constant, quel que

[*] *Comptes rendus*, t. LXXV, p. 736; séance du 30 septembre 1872. — Page 739, ligne 15, *au lieu de* lequel pourra être un contact, *lisez* soit que le contact ait lieu.

soit le point; ce qui est évident, puisque la recherche de ce nombre est un problème déterminé.

Théorème. — *Le nombre des points communs à deux courbes d'ordre* p *et* p′ *est* pp′.

Démonstration. — Une droite IX, tournant autour d'un point I, rencontre la première courbe en p points α; par chacun de ces points, on mène les tangentes de la seconde courbe, qui (réelles ou imaginaires) sont en nombre constant q', ce qui fait pq' tangentes; et par leurs points de contact α', on mène pq' droites IU : ces pq' droites correspondent à la droite IX. A une droite IU correspondent pp' droites IX; car cette droite IU rencontre la seconde courbe en p' points α', et les tangentes en ces points coupent la première courbe en $p'p$ points α, par lesquels passent les $p'p$ droites IX correspondant à IU. Il existe donc $pq' + pp'$ droites IX coïncidant chacune avec une droite correspondante IU. pq' de ces droites coïncident avec les q' tangentes de la seconde courbe, qu'on peut mener par le point I; et les pp' autres sont les droites qui passent par les points d'intersection des deux courbes. Donc ces points d'intersection sont en nombre pp'. Ce qu'il fallait démontrer.

Observation. — Au lieu des tangentes, que l'on suppose menées de chaque point de la première courbe à la seconde, on peut se servir des normales : le raisonnement et la conclusion sont les mêmes. On dira : Une droite IX rencontre la première courbe en p points α, de chacun desquels on mène les normales de la seconde courbe, en nombre constant q', ce qui fait pq' normales; par leurs pieds, on mène pq' droites IU. Une droite IU, menée arbitrairement, coupe la seconde courbe en p' points, et les normales en ces points rencontrent la première courbe en $p'p$ points, par lesquels passent $p'p$ droites IX. Il existe donc $pp' + pq'$ droites IX qui coïncident chacune avec une droite correspondante IU. De ces coïncidences, pq' ont lieu sur les q' normales de la seconde courbe menées par le point I : ce sont des solutions étrangères, et chacune des pp' autres coïncidences a lieu quand une droite IX passe par un point commun aux deux courbes, car ce point est le pied d'une normale à la seconde courbe. Le théorème est donc démontré.

Il serait rare de trouver un pareil exemple de l'usage des tangentes ou des normales, indifféremment, dans une même démonstration.

On conçoit que le principe de correspondance s'applique avec la même facilité à la démonstration du théorème corrélatif, savoir : que le nombre des tangentes communes à deux courbes de la classe n, n', respectivement, est nn'.

Démonstration. — D'un point x d'une droite L on mène n tangentes à la première courbe; puis, de leurs points de contact, nn' tangentes à la deuxième courbe, lesquelles coupent L en nn' points u. D'un point u de L on mène n' tangentes à la deuxième courbe, lesquelles rencontrent la première courbe en $n'm$ points; les tangentes en ces points coupent L en $n'm$ points x. Il existe donc $nn'+n'm$ points x qui coïncident chacun avec un point u correspondant. $n'm$ de ces points coïncident avec les m points de la première courbe situés sur L. Les nn' autres appartiennent à nn' tangentes communes aux deux courbes. Donc, etc.

Le même raisonnement convient pour démontrer que deux courbes U_m^n, $U_{m'}^{n'}$ admettent $(m+n)(m'+n')$ normales communes; ou bien que $n(m'+n')$ tangentes de la première courbe sont normales à la seconde.

Je vais donner quelques exemples de contacts d'*ordre supérieur* en des points de l'infini, exemples que l'on ne rencontre guère, je crois, dans les Traités de Géométrie analytique, ainsi que dans les applications de la Théorie de l'Élimination, que pour des contacts simples.

La tangente au point de contact des deux courbes, supposé à l'infini, peut avoir quatre positions différentes qu'il y a lieu de distinguer. Elle sera un des axes coordonnés, ou parallèle à un de ces axes, ou aura une direction quelconque, ou enfin elle sera la droite de l'infini. Ce dernier cas se subdivise, relativement à la position du point de contact, qui peut être sur un axe coordonné ou dans une direction quelconque.

I. $$ax^2y+bxy+cx+ey^2x+fy^2=0,$$
$$ax^2y+bxy+cx+e'y^2x+f'y^2=0.$$

Faisant
$$pp'-(p-m)(p'-m')-(p-n)(p'-n')=\mathrm{N},$$

on a ici

$$N = 9 - 1 - 1 = 7.$$

Les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox en son point de l'infini, et ont en ce point un contact du troisième ordre; donc $\omega = 3$, et $N - \omega = 4$. Ainsi les courbes ont quatre points communs à distance finie : deux de ces points coïncident en O, où les courbes sont tangentes à l'axe Oy; les deux autres sont sur la droite $(e - e')x + f - f' = 0$.

I'. $$ay^3x + cy^2x + fy^2 + bx^2y^2 + ex^2y + gxy + hx^2 = 0,$$
$$ay^3x + cy^2x + fy^2 + b'x^2y^2 + e'x^2y + g'xy + h'x^2 = 0.$$

$N = 16 - 1 - 4 = 11$. Les deux courbes sont tangentes à l'axe Oy à l'infini, et ont en ce point un contact du troisième ordre, ce qui leur fait trois points à l'infini, outre celui qui a été compté dans la valeur de N. Ainsi $\omega = 3$ et $N - \omega = 8$. Les courbes ont donc huit points communs à distance finie. Quatre de ces points coïncident à l'origine des coordonnées, où les deux courbes ont chacune un point double. Les quatre autres sont déterminés par une équation du quatrième degré en y, qu'on obtient ainsi : des deux équations soustraites l'une de l'autre, puis divisées par xy, on tire une expression de x en fonction de y, qui, mise dans une des équations, donne l'équation finale du quatrième degré.

II. $$ay^2x + by^2 + cy + ex^2y + fx^2 + gxy + hx = 0,$$
$$a'y^2x + b'y^2 + c'y + ex^2y + fx^2 + gxy + hx = 0.$$

$N = 9 - 1 - 1 = 7$. Les deux courbes ont un contact du second ordre au point de l'infini sur Ox; leur tangente en ce point est la droite $y = -\frac{f}{e}$; on a donc $\omega = 2$ et $N - \omega = 5$. Ainsi les courbes ont cinq points communs à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées. Les quatre autres sont déterminés par une équation finale en x ou en y, qu'on obtient sans difficulté; car des deux équations proposées on tire celle-ci :

$$(a - a')yx + (b - b')y + (c - c') = 0,$$

et la valeur de x ou de y tirée de cette équation et mise dans l'une des deux premières donne une équation du quatrième degré.

II'. $$ax^3y + bx^2y^2 + cx^2 + ex^2y + fy^2x + gy^2 + hyx = 0,$$
$$ax^3y + bx^2y^2 + cx^2 + ex^2y + f'y^2x + g'y^2 + h'yx = 0.$$

$N = 16 - 1 - 4 = 11$. Les courbes ont à l'infini chacune un point double sur l'axe Oy, et un point simple sur l'axe Ox; donc $N = 16 - 4 - 1 = 11$. Mais ce point sur l'axe Ox est un contact du second ordre dont la tangente a pour équation $y = -\frac{c}{a}$, ce qui fait deux points de plus à l'infini. Enfin les deux courbes ont en outre un point d'intersection à l'infini dans la direction de la droite $y = -\frac{a}{b}x$: On a donc $\omega = 2 + 1 = 3$ et $N - 3 = 8$. Ainsi les deux courbes ont huit points communs à distance finie. Cinq de ces points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes ont chacune un point double, dont une branche de chacune est tangente à l'axe Ox. Les trois autres points communs aux deux courbes sont déterminés par une équation finale en x ou en y du troisième degré. En effet, des deux équations proposées, soustraites l'une de l'autre, on tire celle-ci :

$$(f - f')yx + (g - g')y + (h - h')x = 0,$$

et l'élimination de x ou de y entre cette équation et l'une des premières conduit à l'équation du troisième degré.

III. $$9x^4 - x^2y^2 - xy^2 - 3xy + y^2 = 0,$$
$$9x^4 - x^2y^2 + 9x^3 - 6x^2y - 18x^2 + 2y^2 = 0.$$

$N = 16 - 2.2 = 12$. Les deux courbes ont un contact du second ordre en un point de l'infini, situé dans la direction de la droite $y = 3x$ $\left(\text{leur tangente en ce point ayant pour équation } y = 3x - \frac{3}{2}\right)$. Donc $\omega = 3$ et $N - \omega = 9$. Ainsi les deux courbes ont neuf points communs à distance finie. Cinq coïncident à l'origine O, où les deux courbes ont chacune un point double, dont deux branches ont une tangente commune. Les quatre autres points communs aux deux courbes sont dé-

terminés par une équation finale en x du quatrième degré, qu'on obtient en retranchant les deux équations l'une de l'autre, d'où l'on conclut $y = \frac{3x(x-2)}{(x+1)}$; cette valeur de y, mise dans une des équations, la réduit au quatrième degré en x.

III'. $$5x^3 - 6x^2y + xy^2 + 5x^2 - 4xy + y^2 + 3y = 0.$$
$$5x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

N = 6. Les deux courbes ont deux points communs à l'infini; l'un, dans la direction de la droite $y = 5x$, est un point d'intersection; et l'autre, dans la direction de la droite $y = x$, est un point de contact du second ordre, dont la tangente a pour équation $y = x + \frac{1}{2}$, ce qui fait quatre points communs à l'infini; donc $\omega = 4$ et $N - \omega = 2$. Ainsi les deux courbes ont deux points communs à distance finie. On trouve sans difficulté que ces points ont pour coordonnées $x = -\frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, et $x = -\frac{9}{7}$, $y = -\frac{30}{7}$.

IV. $$ax^2y^2 + bxy^2 + ey^3 + cx^2y + fx^2 + gxy + hy = 0,$$
$$ax^2y^2 + bxy^2 + ey^3 + c'x^2y + f'x^2 + g'xy + h'y = 0.$$

N = 16 − 4 − 1 = 11. Ces courbes sont tangentes à la droite de l'infini à l'extrémité de l'axe Oy, et ont en ce point un contact du troisième ordre, ce qui leur fait trois points communs, outre celui qui se trouve compris dans la valeur de N. Ainsi $\omega = 3$, et $N - \omega = 8$. Les courbes ont donc huit points communs à distance finie. Quatre de ces points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes ont chacune un point double. Les quatre autres sont déterminés par une équation finale du quatrième degré en x, qui s'obtient sans difficulté. Les deux équations étant soustraites l'une de l'autre, il en résulte une équation où y n'entre qu'au premier degré, et dont la valeur, mise dans l'une des deux proposées, donne l'équation du quatrième degré en x.

IV'. $$ay^2x^2 + byx^2 + cx^3 + ey^2x + fy^2 + gyx + hx^2 = 0,$$
$$ay^2x + byx + cx^2 + g'y + h'x = 0.$$

$N = 12 - 1 - 2 = 9$. Les deux courbes sont tangentes à la droite de l'infini à l'extrémité de l'axe Ox, et ont en ce point un contact du troisième ordre; ce qui leur fait trois points communs, outre celui qui entre dans la valeur de N : ainsi $\omega = 3$ et $N - \omega = 6$. Les courbes ont donc six points communs à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la première courbe a un point double. Les quatre autres se peuvent déterminer par une équation du quatrième degré en $\left(\frac{y}{x}\right)$, dont les racines α exprimeront les directions des droites $y = \alpha x$, qui, partant de l'origine O, passent par les quatre points. En effet, la seconde équation étant multipliée par x et soustraite de la première, on a

$$ey^2x + fy^2 + (g - g')xy + (h - h')x^2,$$
$$e\frac{y^2}{x^2}x + f\frac{y^2}{x^2} + (g - g')\frac{y}{x} + (h - h') = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{x} = -\frac{e\frac{y^2}{x^2}}{f\frac{y^2}{x^2} + (g - g')\frac{y}{x} + (h - h')}.$$

Cette valeur de $\frac{1}{x}$, mise dans la première équation, divisée d'abord par x^4 et écrite ainsi :

$$a\frac{y^2}{x^2} + \left(e\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c\right)\frac{1}{x} + \left(f\frac{y^2}{x^2} + g\frac{y}{x} + h\right)\frac{1}{x^2} = 0,$$

la transforme en une équation du quatrième degré en $\frac{y}{x}$, dont les racines déterminent les quatre points communs aux deux courbes

$$\text{V.} \quad ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dx^2 + exy + fx + gy = 0,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f' = 0,$$

où l'on a

$$b^2 - 4ac^2 = 0.$$

$N = 6$. Les deux courbes ont un point commun à l'infini, dans

la direction de la droite $y = -\frac{b}{2c}x$; elles sont tangentes en ce point à la droite de l'infini, et ont entre elles un contact du troisième ordre; donc $\omega = 4$ et $N - \omega = 2$. Ainsi les courbes ont deux points communs à distance finie. Et, en effet, ces points sont accusés par l'équation

$$(f - f')x + gy = 0,$$

qu'on tire des deux proposées.

V'. $$x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - 4xy - 2x - 3y = 0,$$
$$x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - 4xy - 3x - y = 0.$$

$N = 9 - 1 = 8$. Ces deux courbes sont tangentes, à la droite de l'infini, au point situé dans la direction $y = x$, et ont en ce point un contact du troisième ordre. En outre, elles sont tangentes à l'axe Oy au point de l'infini; on a donc $\omega = 4 + 1 = 5$ et $N = 8 - 5 = 3$. Ainsi les deux courbes ont trois points communs à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées, les deux autres sont sur la droite $2y - 5x = 0$.

Observation. — On facilite les calculs relatifs à des contacts d'ordre supérieur en des points de l'infini, en les ramenant à des contacts de même ordre à des distances finies, par une transformation homographique. Les formules les plus simples sont celles-ci :

$$x = \frac{1}{y'}, \quad y = \frac{x'}{y'}, \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'},$$

par lesquelles la droite de l'infini devient un des axes coordonnés.

Sur la résolution de l'équation du quatrième degré;

PAR M. G. DARBOUX.

On connaît bien des méthodes de résolution de l'équation du quatrième degré. Celle que je propose met en évidence, sans faire appel à la théorie des invariants, les éléments essentiels qui figurent dans les différentes solutions, et elle conduit, sans difficulté, à l'expression de la fonction la plus générale d'une racine par une somme de trois radicaux. Ce résultat me paraît nouveau; j'en déduis l'expression des fonctions des racines qui dépendent d'une équation du quatrième degré, pour laquelle l'invariant quadratique est nul. M. Hermite a montré que les équations de cette forme se ramènent immédiatement à celles qu'on rencontre dans la théorie de la trisection des fonctions elliptiques, et c'est de ce fait important qu'il a déduit sa méthode de résolution des équations du quatrième degré par les fonctions elliptiques.

On sait que la recherche des points communs à deux courbes du second degré se ramène à la résolution d'une équation du quatrième ordre à une inconnue. Inversement, on peut faire dépendre la résolution des équations biquadratiques de la détermination des points communs à deux coniques. On est ainsi conduit à la marche que je vais exposer, sans y mêler aucune considération géométrique.

I.

Soient

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi = a_0 x^2 + a_2 y^2 + a_4 z^2 + 2a_3 yz + 2a_2 xz + 2a_1 xy, \\ \psi = y^2 - 4xz \end{cases}$$

deux formes quadratiques. La fonction adjointe de $\varphi + m\psi$ sera don-

née par la formule

$$(2)\qquad F = -\begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ Y & a_1 & a_2 + m & a_3 \\ Z & a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

et l'on sait qu'elle deviendra un carré parfait, pour toutes les valeurs de m qui annulent le déterminant suivant :

$$(3)\qquad \Delta(m) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ a_1 & a_2 + m & a_3 \\ a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant développé prend la forme

$$(4)\qquad \Delta(m) = J + Im - 4m^3,$$

où l'on a posé

$$(5)\qquad \begin{cases} J = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3, \\ I = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2. \end{cases}$$

Le développement de F nous donne, de même,

$$(6)\qquad F = H + Km + Lm^2,$$

où H, K, L sont trois formes quadratiques définies par les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} H = (a_2 a_4 - a_3^2)X^2 + (a_0 a_4 - a_2^2)Y^2 \\ \qquad + (a_0 a_2 - a_1^2)Z^2 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)YZ \\ \qquad + 2(a_1 a_3 - a_2^2)XZ + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)XY, \\ K = a_4 X^2 + 4a_2 Y^2 + a_0 Z^2 + 4a_1 YZ + 2a_2 XZ + 4a_3 XY, \\ L = 4(XZ - Y^2). \end{cases}$$

Cela posé, décomposons en fractions simples la fraction rationnelle

$\frac{F}{\Delta}$ considérée comme fonction de m. On aura

$$(8)\quad \frac{F}{\Delta} = -\sum \frac{1}{\Delta'(v_1)(m-v_1)} \begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & a_0 & a_1 & a_2 - 2v_1 \\ Y & a_1 & a_2 + v_1 & a_3 \\ Z & a_2 - 2v_1 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

v_1, v_2, v_3 étant les trois racines de l'équation $\Delta(m) = 0$ et la somme qui figure dans le second membre étant étendue à ces trois racines. D'après une remarque, déjà faite, sur la forme adjointe, chacun des trois déterminants qui figurent dans le second membre de l'équation (8) est un carré parfait et l'on a, par exemple,

$$(9)\quad \begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & a_0 & a_1 & a_2 - 2v_1 \\ Y & a_1 & a_2 + v_1 & a_3 \\ Z & a_2 - 2v_1 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = P_1^2 = \frac{1}{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1} \begin{vmatrix} X & a_0 & a_1 \\ Y & a_1 & a_2 + v_1 \\ Z & a_2 - 2v_1 & a_3 \end{vmatrix}^2.$$

L'équation (8) pourra donc s'écrire

$$(10)\quad \frac{F}{\Delta(m)} = -\frac{P_1^2}{\Delta'(v_1)(m-v_1)} - \frac{P_2^2}{\Delta'(v_2)(m-v_2)} - \frac{P_3^2}{\Delta'(v_3)(m-v_3)};$$

c'est la relation fondamentale que nous voulions établir et d'où il serait bien facile de déduire la décomposition des formes φ et ψ en sommes composées des mêmes carrés. On en déduit, par la comparaison avec la formule (6),

$$H + Km + Lm^2 = \sum \frac{-\Delta(m) P_1^2}{\Delta'(v_1)(m-v_1)},$$

et, en égalant les coefficients des mêmes puissances de m dans les deux membres,

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{1}{4} L = \sum \frac{P_1^2}{\Delta'(v_1)}, \\ \frac{1}{4} K = \sum \frac{v_1 P_1^2}{\Delta'(v_1)}, \\ H = \sum \frac{4v_1^2 - 1}{\Delta'(v')} P_1^2. \end{cases}$$

On a aussi évidemment

$$(12)\qquad \begin{cases} P_1^2 = -H - K\rho_1 - L\rho_1^2, \\ P_2^2 = -H - K\rho_2 - L\rho_2^2, \\ P_3^2 = -H - K\rho_2 - L\rho_3^2. \end{cases}$$

II.

Pour obtenir des formules relatives aux formes biquadratiques, remplaçons dans les équations précédentes

$$X,\quad Y,\quad Z \quad \text{par} \quad y^2,\quad xy,\quad x^2,$$

nous trouverons

$$(13)\quad K = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 xy^3 + a_4 y^4 = f(x, y),$$

et $f(x, y)$ sera pour nous la forme fondamentale;

$$(14)\qquad \begin{cases} H = (a_0 a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x^3 y \\ \qquad + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)x^2 y^2 \\ \qquad + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)xy^3 + (a_2 a_4 - a_3^2)y^4, \end{cases}$$

et enfin

$$(15)\qquad L = 0.$$

Nous désignerons la nouvelle valeur de H par h, c'est le hessien de la forme f. On a, en effet,

$$h = \frac{1}{12^2}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^2 f}{dy^2} - \left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right)^2\right].$$

Quant aux fonctions P_1, P_2, P_3, elles deviendront des fonctions Q_1, Q_2, Q_3 homogènes et du second degré en x, y. On aura identiquement, en vertu des équations (11),

$$(16)\qquad \frac{Q_1^2}{\Delta'(\rho_1)} + \frac{Q_2^2}{\Delta'(\rho_2)} + \frac{Q_3^2}{\Delta'(\rho_3)} = 0$$

et

$$(17)\qquad f(x, y) = \frac{4\nu_1 Q_1^2}{\Delta'(\nu_1)} + \frac{4\nu_2 Q_2^2}{\Delta'(\nu_2)} + \frac{4\nu_3 Q_3^2}{\Delta'(\nu_3)},$$

ce qu'on peut écrire, en tenant compte de l'équation précédente,

$$(18)\qquad f(x, y) = \frac{4(\nu_1 - m)Q_1^2}{\Delta'(\nu_1)} + \frac{4(\nu_2 - m)Q_2^2}{\Delta'(\nu_2)} + \frac{4(\nu_3 - m)Q_3^2}{\Delta'(\nu_3)},$$

m ayant une valeur quelconque. Les formules (12) nous donnent aussi

$$(19)\qquad Q_1^2 = -h - \nu_1 f, \quad Q_2^2 = -h - \nu_2 f, \quad Q_3^2 = -h - \nu_3 f,$$

et de ces relations résultent, comme on va le voir, les différents modes de résolution de l'équation du quatrième degré.

III.

En donnant à m, dans l'équation (18), une des valeurs ν_1, ν_2, ν_3, ν_1 par exemple, on a

$$(20)\qquad f(x, y) = \frac{Q_2^2 - Q_3^2}{\nu_3 - \nu_2} = \frac{(Q_2 + Q_3)(Q_2 - Q_3)}{\nu_3 - \nu_2}.$$

La résolution de l'équation proposée sera donc ramenée à celle des deux équations du second degré

$$Q_2 - Q_3 = 0, \quad Q_2 + Q_3 = 0,$$

ou

$$(21)\qquad \sqrt{-h - \nu_2 f} \pm \sqrt{-h - \nu_3 f} = 0.$$

On aura de même

$$f(x, y) = \frac{Q_3^2 - Q_1^2}{\nu_1 - \nu_3} = \frac{Q_1^2 - Q_2^2}{\nu_2 - \nu_1},$$

ce qui donne les trois décompositions de la forme $f(x, y)$ en deux facteurs quadratiques. Mais cette méthode, qui peut être très-commode pour la résolution des équations numériques, ne paraît guère propre à mettre en évidence les expressions des racines par des sommes de radicaux. Pour obtenir ce résultat, nous chercherons d'abord les expressions des fonctions Q_1, Q_2, Q_3, en fonction des racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

A cet effet

$$Q_1 \pm Q_2, \quad Q_1 \pm Q_3, \quad Q_2 \pm Q_3$$

étant les six diviseurs quadratiques de $f(x, y)$ nous remarquerons qu'on doit avoir, en faisant pour abréger $y = 1$,

$$\begin{aligned}
Q_2 - Q_3 &= \lambda_1 (x-\alpha)(x-\delta), & Q_2 + Q_3 &= \mu_1 (x-\beta)(x-\gamma),\\
Q_1 - Q_3 &= \lambda_2 (x-\alpha)(x-\gamma), & Q_1 + Q_3 &= \mu_2 (x-\beta)(x-\delta),\\
Q_1 - Q_2 &= \lambda_3 (x-\alpha)(x-\beta), & Q_2 + Q_3 &= \mu_3 (x-\gamma)(x-\delta).
\end{aligned}$$

Le facteur $x - \alpha$, par exemple, doit figurer dans $Q_1 - Q_2$, qui est la différence entre $Q_1 - Q_3$ et $Q_2 - Q_3$. Les autres expressions se justifient de la même manière. On déduit de ces formules deux expressions pour chacune des trois fonctions Q_1, Q_2, Q_3. En exprimant que ces doubles valeurs sont égales pour les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de x, on fixera sans peine les rapports respectifs des quantités λ, μ, et l'on obtiendra ainsi

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
Q_1 &= \lambda[(\gamma-\delta)(x-\alpha)(x-\beta) + (\beta-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)]\\
&= \lambda[(\beta-\delta)(x-\alpha)(x-\gamma) + (\gamma-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)],\\
Q_2 &= \lambda[(\delta-\gamma)(x-\alpha)(x-\beta) + (\beta-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)]\\
&= \lambda[(\beta-\gamma)(x-\alpha)(x-\delta) + (\delta-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)],\\
Q_3 &= \lambda[(\delta-\beta)(x-\alpha)(x-\gamma) + (\gamma-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)]\\
&= \lambda[(\gamma-\beta)(x-\alpha)(x-\delta) + (\delta-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)],
\end{aligned}\right.$$

et il n'y aura plus à déterminer que le facteur λ. Or, d'après l'équation (9), le premier terme de la fonction Q_1 est $\pm\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1}$.

On a donc

$$(23)\qquad \mp\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1} = \lambda(\beta + \gamma - \alpha - \delta).$$

De même

$$23)\qquad \left\{\begin{array}{l} \pm\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2} = \lambda(\beta + \delta - \alpha - \gamma), \\ \pm\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_3} = \lambda(\gamma + \delta - \alpha - \beta), \end{array}\right.$$

et ces équations, élevées au carré et ajoutées membre à membre, nous donnent

$$3(a_1^2 - a_0 a_2) = \lambda^2(3\Sigma\alpha^3 - 2\Sigma\alpha\beta) = \frac{48\lambda^3}{a_0^2}(a_2^1 - a_0 a_2),$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \pm\frac{a_0}{4}.$$

Nous prendrons $\lambda = -\frac{a_0}{4}$, puisque nous pouvons choisir le signe des fonctions Q_1, et, en substituant cette valeur dans les équations (23), nous en déduirons les expressions suivantes de v_1, v_2, v_3 en fonction des racines :

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} v_1 = -\frac{a_0}{12}[(\beta - \alpha)(\gamma - \delta) + (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)], \\ v_2 = -\frac{a_0}{12}[(\beta - \alpha)(\delta - \gamma) + (\beta - \gamma)(\delta - \alpha)], \\ v_3 = -\frac{a_0}{12}[(\gamma - \alpha)(\delta - \beta) + (\gamma - \beta)(\delta - \alpha)]. \end{array}\right.$$

L'équation

$$4m^3 - \mathrm{I}m - \mathrm{J} = 0,$$

qui donne les trois valeurs v_1, v_2, v_3 de m, est celle que M. Hermite a prise pour base de sa belle méthode de résolution des équations biquadratiques (*Journal de M. Borchardt*, t. 52). Nous retrouvons ici cette méthode ; car il suffira, pour avoir les quatre racines α, β, γ, δ, de joindre aux équations (23) la suivante :

$$a_0(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = -4a_1,$$

qui donne la somme des racines. On obtiendra ainsi l'expression suivante de α :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} a_0\alpha + a_1 = &\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1} \\ &+ \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2} + \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_3}. \end{aligned}\right.$$

Les mêmes équations nous donneront aussi β, γ, δ par des expressions qu'on déduira de la précédente, en changeant les signes des radicaux de telle manière, que le produit des trois radicaux pris chaque fois avec leur signe conserve une même valeur. En d'autres termes, si l'on a les signes pour la racine α, il faudra en changer deux quelconques pour avoir les expressions des autres racines.

Cette détermination si essentielle des signes des radicaux résulte, comme on sait, de ce fait, que le produit des valeurs des trois radicaux doit être égal à une fonction rationnelle des coefficients. Voici comment on peut établir cette proposition.

Reprenons les équations

$$\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1} = \frac{a_0}{4}(\alpha + \beta - \gamma - \delta),$$
$$\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2} = \frac{a_0}{4}(\alpha + \gamma - \beta - \delta),$$
$$\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_3} = \frac{a_0}{4}(\alpha + \delta - \beta - \gamma).$$

En les multipliant membre à membre, nous voyons que le produit des trois radicaux doit être égal à la fonction symétrique

$$\left(\frac{a_0}{4}\right)^3(\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha + \gamma - \beta - \delta)(\alpha + \delta - \beta - \gamma)$$

et, par conséquent, doit s'exprimer en fonction rationnelle des coefficients; mais on peut, sans effectuer le calcul de cette fonction symétrique, démontrer que

$$(26)\quad (a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1)(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_2)(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_3)$$

est un carré parfait. On a, en effet,

$$-\Delta(m) = 4m^3 - \mathrm{I}m - \mathrm{J} = 4(m - v_1)(m - v_2)(m - v_3)$$

et, en remplaçant m par $\frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}$,

$$4(a_1^2 - a_0 a_2)^3 - a_0^2(a_1^2 - a_0 a_2)\mathrm{I} - \mathrm{J} a_0^3$$
$$= 4(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_1)(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_2)(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_3).$$

Or le premier membre est, à un facteur constant près, le résultat de la substitution, dans $\Delta(m)$,

$$\Delta(m) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ a_1 & a_2 + m & a_3 \\ a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

de la valeur de m qui annule le mineur $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 + m \end{vmatrix}$.

On aura donc, d'après une formule connue,

$$a_0 \Delta(m) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 + m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 - 2m \\ a_2 - 2m & + a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 - 2m & a_3 \end{vmatrix}^2,$$

ou

$$a_0 \Delta(m) = -(a_0 a_3 - a_1 a_2 + 2ma_1)^2,$$

ou, en substituant la valeur de m,

$$4(a_1^2 - a_0 a_2)^3 - a_0^2(a_1^2 - a_0 a_2)\mathrm{I} - \mathrm{J} a_0^3 = (2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3)^2,$$

ou enfin

$$(27) \left\{ \begin{aligned} & 2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_1}\,\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_3}\,\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_2} \\ & \quad = -2a_1^3 + 3a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3. \end{aligned} \right.$$

Le signe du second membre est déterminé par la remarque que la fonction symétrique à calculer contient $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$ que donne le terme $-a_1^3$. Les signes des radicaux sont donc nettement déterminés dans les expressions des différentes racines.

IV.

Des équations

$$h + \nu_1 f = -Q_1^2, \quad h + \nu_2 f = -Q_2^2, \quad h + \nu_3 f = -Q_3^2,$$

on déduit une conséquence, importante dans la théorie des formes biquadratiques. On a évidemment

$$\begin{vmatrix} \frac{dh}{dx} + \nu_1 \frac{df}{dx} & \frac{dh}{dy} + \nu_1 \frac{df}{dy} \\ \frac{dh}{dx} + \nu_2 \frac{df}{dx} & \frac{dh}{dy} + \nu_2 \frac{df}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2Q_1 \frac{dQ_1}{dx} & 2Q_1 \frac{dQ_1}{dy} \\ 2Q_2 \frac{dQ_2}{dx} & 2Q_2 \frac{dQ_2}{dy} \end{vmatrix},$$

ou

$$(\nu_2 - \nu_1)\left(\frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx}\right) = 4Q_1 Q_2 \left(\frac{dQ_1}{dx}\frac{dQ_2}{dy} - \frac{dQ_2}{dx}\frac{dQ_1}{dy}\right).$$

Comme on obtiendrait deux équations analogues en permutant ν_1, ν_2, ν_3, on conclut de la précédente

$$(28) \qquad \frac{dQ_1}{dx}\frac{dQ_2}{dy} - \frac{dQ_2}{dx}\frac{dQ_1}{dy} = k(\nu_2 - \nu_1)Q_3;$$

d'où il suit que des trois fonctions Q_1, Q_2, Q_3 chacune est, à un facteur constant près, le déterminant fonctionnel de l'autre. Ce fait résulte aussi de ce que la somme des carrés des trois fonctions est égale à zéro. On aura donc

$$\frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx} = 4kQ_1 Q_2 Q_3;$$

le terme en x^6, dans le premier membre, a pour coefficient

$$8(3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - a_3 a_0^2);$$

dans le second membre, le coefficient du même terme est

$$4k\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_1}\,\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_2}\,\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 \nu_3},$$

ou, d'après l'équation (27),

$$2k(3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - a_3 a_0^2).$$

On a donc $k = 4$ et

$$(29) \qquad \frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx} = 16\,Q_1\,Q_2\,Q_3,$$

ou, en élevant au carré,

$$\left(\frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx}\right)^2 = -\overline{16}^2\,(h + v_1 f)(h + v_2 f)(h + v_3 f),$$

et par suite, en posant $\frac{1}{8}\left(\frac{dh}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{dh}{dy}\frac{df}{dx}\right) = T$,

$$(30) \qquad T^2 = -4h^3 + Ihf^2 - Jf^3;$$

c'est la relation entre les trois covariants fondamentaux T, h, f.

M. Cayley a déduit de cette relation une méthode nouvelle de résolution des équations biquadratiques que nous sommes maintenant en mesure de donner d'une manière complète.

L'équation

$$(v_2 - v_3)\,Q_1 + (v_3 - v_1)\,Q_2 + (v_1 - v_2)\,Q_3 = 0,$$

qui est du second degré, est évidemment satisfaite par la valeur α de x, qui est racine de l'équation biquadratique et qui donne

$$Q_1 = Q_2 = Q_3.$$

Je dis que l'équation (31) admet une racine double, c'est-à-dire que α satisfait aussi à l'équation

$$(v_2 - v_3)\frac{dQ_1}{dx} + (v_3 - v_1)\frac{dQ_2}{dx} + (v_1 - v_2)\frac{dQ_3}{dx} = 0;$$

cela résulte, en effet, de l'identité (16), qui donne

$$(v_2 - v_3)\,Q_1^2 + (v_3 - v_1)\,Q_2^2 + (v_1 - v_2)\,Q_3^2 = 0,$$

ou, en différentiant,

$$(v_2 - v_3)\,Q_1\frac{dQ_1}{dx} + (v_3 - v_1)\,Q_2\frac{dQ_2}{dx} + (v_1 - v_2)\,Q_3\frac{dQ_3}{dx} = 0.$$

En faisant, dans cette relation, $Q_1 = Q_2 = Q_3$, on obtient l'équation qu'il s'agissait de démontrer. Nous avons donc la proposition suivante de M. Cayley. L'une des équations du second degré

$$(\nu_2 - \nu_3)\sqrt{-h - \nu_1 f} \pm (\nu_3 - \nu_1)\sqrt{-h - \nu_2 f} \\ \pm (\nu_1 - \nu_2)\sqrt{-h - \nu_3 f} = 0$$

admet comme racine double une racine simple de l'équation proposée. Les quatre combinaisons de signes correspondent aux quatre racines de l'équation proposée.

V.

J'arrive maintenant à l'expression de la fonction la plus générale d'une racine par une somme de radicaux. Nous déduirons cette expression des formules (22). En les ajoutant, nous trouvons

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{a_0}{4}[(\alpha - \gamma)(x - \beta)(x - \delta) + (\alpha - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \\ + (\alpha - \delta)(x - \beta)(x - \gamma)],$$

ou

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{a_0}{4(x - \alpha)}[(\alpha - \gamma)(x - \alpha)(x - \beta)(x - \delta) \\ + (\alpha - \beta)(x - \alpha)(x - \gamma)(x - \delta) \\ + (\alpha - \delta)(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)].$$

L'expression entre parenthèses, multipliée par a_0, est la valeur de $x'\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}$ pour $x' = \alpha$, $y = 1$. On a donc

$$\frac{\alpha\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}}{4(x - \alpha y)} = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

ou

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3)\alpha + a_1 x^3 + 3a_2 x^2 y + 3a_3 x y^2 + a_4 y^2}{x - \alpha y} \\ &= \pm\sqrt{-h - \nu_1 f} \pm \sqrt{-h - \nu_2 f} \pm \sqrt{-h - \nu_3 f}. \end{aligned} \right.$$

Les signes à prendre dans le second membre résultent sans difficulté de l'expression des fonctions Q_1, puisque, d'après les formules (9), les produits

$$Q_1\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 v_1}$$

sont des fonctions rationnelles des racines, ou encore, d'après l'équation (29), le produit des trois radicaux doit être égal à $\frac{1}{2}T$.

La formule (31) est due à M. Aronhold, qui l'a donnée dans le tome 52 du *Journal de M. Borchardt*. On l'obtiendrait en effectuant une substitution linéaire dans la forme biquadratique et en appliquant ensuite la formule (25). Pour avoir la fonction la plus générale d'une racine, nous opérerons de la manière suivante :

Les trois fonctions Q_1 ont été déduites des fonctions linéaires P_1, en faisant dans celles-ci la substitution de y^2, xy, x^2 à X, Y, Z. Réciproquement les fonctions Q_1, Q_2, Q_3 étant seulement du second degré, on en déduira les fonctions P_1, P_2, P_3 en y remplaçant y^2, xy, x^2 par X, Y, Z, et l'on aura alors

$$P_1 = \sqrt{-H - Kv_1 - Lv_2^2}, \ldots,$$

les signes étant déterminés par les mêmes conditions que pour les fonctions Q_1.

Or on trouve, en effectuant la division dans le premier membre de l'équation (31),

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 = {} & (a_0\alpha + a_1)x^2 + (a_0\alpha^2 + 4a_1\alpha + 3a_2)xy \\ & + (a_0\alpha^3 + 4a_1\alpha^2 + 6a_2\alpha + 3a_3)y^2. \end{aligned}$$

On aura alors

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} & (a_0\alpha + a_1)Z + (a_0\alpha^2 + 4a_1\alpha + 3a_2)Y + (a_0\alpha^3 + 4a_1\alpha^2 + 6a_2\alpha + 3a_3)X \\ & \quad = P_1 + P_2 + P_3 = \sqrt{-H - Kv_1 - Lv_1^2} + \sqrt{-H - Kv_2 - Lv_2^2} \\ & \qquad + \sqrt{-H - Kv_3 - Lv_3^2}. \end{aligned} \right.$$

C'est l'équation que nous nous proposions d'obtenir; elle donne l'expression de la fonction la plus générale d'une racine pour laquelle la

somme des quatre valeurs soit nulle. En y ajoutant la constante

$$a_0 T + 3a_1 Z + 3a_2 Y + a_3 Z,$$

nous aurons

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_0\alpha^3 + 4a_1\alpha^2 + 6a_2\alpha + 4a_3)X + (a\alpha^2 + 4a_1\alpha + 6a_2)Y \\ &\quad + (a_0\alpha + 4a_1)Z + a_0 T \\ &= a_0 T + 3a_1 Z + 3a_2 Y + a_3 T \pm \sqrt{-H - K\rho_1 - L\rho_1^2} \\ &\pm \sqrt{-H - K\rho_2 - L\rho_2^2} \pm \sqrt{-H - K\rho_3 - L\rho_3^2}. \end{aligned}\right.$$

On trouvera facilement, en partant des équations (12), que le produit des trois radicaux est égal à la fonction rationnelle

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{dL}{dX} & \frac{dL}{dY} & \frac{dL}{dZ} \\ \frac{dK}{dX} & \frac{dK}{dY} & \frac{dK}{dZ} \\ \frac{dH}{dx} & \frac{dH}{dy} & \frac{dH}{dz} \end{vmatrix}.$$

VI.

On voit que les formules relatives à la fonction la plus générale d'une racine contiennent sous les radicaux les carrés des racines de l'équation résolvante. C'est par là qu'elles se distinguent de celle de M. Aronhold. Si l'on veut que ces carrés disparaissent, il faudra supposer

$$L = 4(Y^2 - XZ) = 0.$$

On pourra donc poser

$$Y = xy, \quad X = y^2, \quad Y = x^2,$$

et l'on sera conduit à la formule de M. Aronhold ; mais on peut obtenir d'autres résultats de la manière suivante :

Soient ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 les quatre valeurs d'une fonction quelconque

d'une racine. Chacun des radicaux qui figurent dans les formules (32) et (33) est égal à une quantité telle que

$$\psi_1 + \psi_2 - \psi_2 - \psi_4.$$

Si donc on écrit l'équation

$$(34) \qquad B\psi^4 + B_1\psi^3 + \ldots = 0,$$

qui donne les quatre valeurs de ψ, et si l'on désigne par Θ_1, Θ_2, Θ_3 les trois racines de la nouvelle équation résolvante

$$4m^3 - I_1 m - J_1 = 0,$$

où I_1 J_1 sont les invariants de l'équation (34), on aura évidemment

$$(35) \qquad \begin{cases} -H - K\rho_1 - L\rho_1^2 = A + B\Theta_1, \\ -H - K\rho_2 - L\rho_2^2 = A + B\Theta_2, \\ -H - K\rho_3 - L\rho_3^2 = A + B\Theta_3. \end{cases}$$

En faisant la somme de ces trois équations, on déterminera A,

$$3A = -3H - L\Sigma\rho_1^2 = -3H - \frac{LI}{2}.$$

On a donc

$$(36) \qquad B\Theta_1 = \frac{LI}{6} - K\rho_1 - L\rho_1^2.$$

Telle est la formule qui définit, à un facteur constant près, les racines de la nouvelle équation résolvante relative à la fonction ψ. Supposons qu'on remplace B par 1, ce qui est toujours permis, nous aurons

$$\Theta_1 = \frac{LI}{6} - K\rho_1 - L\rho_1^2.$$

Les racines ρ_1 sont d'ailleurs données par la formule de Cardan

$$(37) \qquad \rho_1 = \alpha\sqrt[3]{R} + \alpha^2\sqrt[3]{R'},$$

où α est une racine cubique de l'unité, et R et R′ deux quantités dé-

finies par les formules

$$(38)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{R}\sqrt[3]{R'} = \dfrac{I}{12}, & R = \dfrac{J}{8} + \dfrac{1}{8}\sqrt{J^2 - \dfrac{P}{27}}, \\ R + R' = \dfrac{+J}{4}, & R' = \dfrac{J}{8} - \dfrac{1}{8}\sqrt{J^2 - \dfrac{P}{27}}; \end{cases}$$

on aura donc, en substituant la valeur de v_1,

$$\Theta_1 = \alpha\sqrt[3]{R}\left(-K - \frac{12LR'}{I}\right) + \alpha^2\sqrt[3]{R'}\left(-K - \frac{12LR}{I}\right),$$

expression de même forme que celle de v_1. En appliquant donc les deux premières formules (38), on trouvera

$$(39)\quad \begin{cases} I_1 = I\left(-K - \dfrac{12LR'}{I}\right)\left(-K - 12\dfrac{LR}{I}\right), \\ \dfrac{1}{4}J_1 = -R\left(K + \dfrac{12LR'}{I}\right)^3 - R'\left(K + 12\dfrac{LR}{I}\right)^3. \end{cases}$$

Nous pouvons déduire de ces équations un résultat important auquel a été conduit M. Hermite, dans sa méthode de résolution de l'équation du quatrième degré par les fonctions elliptiques. Pour que l'équation en ψ ait son invariant I_1 nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$(40)\qquad K + \frac{12L}{I}\left(\frac{J}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{J^2 - \frac{P}{27}}\right) = 0.$$

Cette équation est quadratique et homogène en X, Y, Z, et ses coefficients ne contiennent qu'une racine carrée. On pourra donc, par de simples extractions de racines carrées, ramener l'équation proposée du quatrième ordre à une autre dans laquelle l'invariant I_1 sera nul et qui se résoudra immédiatement par l'emploi des fonctions elliptiques.

Au contraire, l'équation $J_1 = 0$ ne peut se résoudre sans des extractions de racines carrées et cubiques.

Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues;

PAR M. G. DARBOUX.

Euler a, comme on sait, intégré le premier l'équation

$$dx^2 + dy^2 = ds^2, \tag{1}$$

c'est-à-dire qu'il a donné en fonction d'un paramètre arbitraire les expressions les plus générales de x, y, s satisfaisant à cette équation et débarrassées de tout signe d'intégration. Je me propose d'indiquer, dans cette Note, un moyen nouveau de parvenir aux formules d'Euler et d'intégrer quelques équations du même genre que la précédente.

Remplaçons dans l'équation (1) s par $z\sqrt{-1}$, elle deviendra

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0. \tag{2}$$

Si l'on y regarde x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, l'équation (2) représente toutes les courbes gauches imaginaires dont l'arc compris entre deux points quelconques est nul. On obtient de la manière suivante les équations finies de ces courbes.

Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation de leur plan osculateur. Les expressions connues de A, B, C permettent de vérifier sans peine que, pour les courbes satisfaisant à l'équation (2), on a

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0, \tag{3}$$

et de cette remarque résulte la solution suivante :

L'équation

$$\Phi = Ax + By + Cz + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des fonctions d'un paramètre arbitraire, assujetties

seulement à vérifier la relation (3), représente un plan variable qui enveloppe une surface développable. L'arête de rebroussement de cette développable est la courbe cherchée. On aura donc, pour tous les points de cette courbe,

$$\Phi = 0, \quad d\Phi = 0, \quad d^2\Phi = 0,$$

et de ces trois équations on déduira x, y, z en fonction de A, B,... et de leurs dérivées.

Prenons, par exemple, Φ sous la forme

$$x\cos\theta + y\sin\theta - z\sqrt{-1} + f(\theta),$$

et remplaçons $z\sqrt{-1}$ par s; nous aurons

$$\begin{aligned} x\cos\theta + y\sin\theta - s + f(\theta) &= 0, \\ -x\sin\theta + y\cos\theta + f'(\theta) &= 0, \\ -x\cos\theta - y\sin\theta + f''(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Ce sont précisément les formules d'Euler.

La méthode précédente ne s'applique pas, comme je l'avais cru d'abord, à l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

qui a été résolue d'une manière très-élégante par M. J.-A. Serret (t. XIII de ce Journal, 1re série). Nous reviendrons plus loin sur cette équation.

Soit maintenant à intégrer de la même manière l'équation différentielle

$$(4) \qquad dx^2 + dy^2 = dx_1^2 + dy_1^2,$$

c'est-à-dire qu'il s'agit de trouver deux courbes planes se correspondant point par point, de manière que les arcs correspondants soient égaux. On pourra poser

$$\begin{aligned} d(x + y\sqrt{-1}) &= e^{\omega\sqrt{-1}}\, d(x_1 + y_1\sqrt{-1}), \\ d(x - y\sqrt{-1}) &= e^{-\omega\sqrt{-1}}\, d(x_1 - y_1\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Conservons seulement la première de ces équations en supposant ω

réel, car la seconde s'en déduira par le changement de signe de $\sqrt{-1}$. On l'intègre par les formules

$$x + y\sqrt{-1} = e^{\omega\sqrt{-1}}(x_1 + y_1\sqrt{-1}) + \alpha + \beta\sqrt{-1},$$
$$0 = e^{\omega\sqrt{-1}}d\omega\sqrt{-1}(x_1 + y_1\sqrt{-1}) + d\alpha + d\beta\sqrt{-1}.$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, nous trouvons

$$x_1 = \frac{d\alpha}{d\omega}\sin\omega - \frac{d\beta}{d\omega}\cos\omega, \quad x = \alpha - \frac{d\beta}{d\omega},$$
$$y_1 = \frac{d\alpha}{d\omega}\cos\omega + \frac{d\beta}{d\omega}\sin\omega, \quad y = \beta + \frac{d\alpha}{d\omega}.$$

C'est la solution que fournit la théorie du déplacement d'une figure dans le plan.

Considérons maintenant l'équation plus générale

$$(5) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2.$$

On pourra poser

$$(6) \qquad \begin{cases} dx = a\,dx_1 + a'dy_1 + a''dz_1, \\ dy = b\,dx_1 + b'dy_1 + b''dz_1, \\ dz = c\,dx_1 + c'dy_1 + c''dz_1, \end{cases}$$

$a, b, c, a', \ldots$ étant des fonctions d'un paramètre t liées par les relations connues

$$(7) \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les équations (6) s'intègrent de la manière suivante. Posons

$$(8) \qquad \begin{cases} x = ax_1 + a'y_1 + a''z_1 + \alpha, \\ y = bx_1 + b'y_1 + b''z_1 + \beta, \\ z = cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + \gamma. \end{cases}$$

Différentions en tenant compte du système (6); nous aurons

$$(9) \qquad \begin{cases} 0 = x_1\,da + y_1\,da' + z_1\,da'' + d\alpha, \\ 0 = x_1\,db + y_1\,db' + z_1\,db'' + d\beta, \\ 0 = x_1\,dc + y_1\,dc' + z_1\,dc'' + d\gamma. \end{cases}$$

Les neuf quantités a, b, c s'expriment en fonction de trois angles. Le système (9) donnera x_1, y_1, z_1 en fonction de ces angles, de α, β, γ et de leurs dérivées. Ensuite le système (8) fera connaître x, y, z. On voit que la solution contiendra six fonctions arbitraires de t et leurs dérivées du premier ordre seulement.

Le procédé précédent s'applique sans difficulté à l'équation intégrée par M. Serret

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2. \tag{10}$$

On posera

$$\left\{\begin{array}{lll} x = as + \alpha, & y = bs + \beta, & z = cs + \gamma, \\ 0 = s\,da + d\alpha, & 0 = s\,db + d\beta, & 0 = s\,dc + d\gamma, \end{array}\right. \tag{11}$$

et l'on aura ainsi la solution générale de l'équation, pourvu que les fonctions a, b, c, α, β, γ satisfassent aux équations

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad \frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db} = \frac{d\gamma}{dc}.$$

Supposons que a, b, c satisfassent à la première de ces équations et soient donnés; nous allons voir qu'on peut tirer α, β, γ des deux dernières sans employer aucun signe d'intégration.

En effet, si l'on considère a, b, c d'une part, α, β, γ de l'autre, comme les coordonnées des points correspondants de deux courbes gauches, on voit que les tangentes aux courbes en ces points devront être parallèles. Donc chacune d'elles sera l'arête de rebroussement d'une surface développable dont les plans tangents seront parallèles aux plans osculateurs de l'autre. Soit

$$\begin{aligned}\Phi = \mathrm{X}(db\,d^2c - dc\,d^2b) &+ \mathrm{Y}(dc\,d^2a - da\,d^2c) \\ &+ \mathrm{Z}(da\,d^2b - db\,d^2a) - u\,dt^3,\end{aligned}$$

u étant une fonction quelconque du paramètre variable t. Les valeurs de X, Y, Z, déduites des équations

$$\Phi = 0, \quad d\Phi = 0, \quad d^2\Phi = 0,$$

seront précisément les valeurs de α, β, γ. En les substituant dans les formules (11), on aura la solution avec trois fonctions arbitraires.

L'équation (5) peut être intégrée par un autre procédé, qui offrira,

dans certains cas, de grands avantages. Posons

$$x = X + X_1, \quad y = Y + Y_1, \quad z = Z + Z_1,$$
$$x_1 = X - X_1, \quad y_1 = Y - Y_1, \quad z_1 = Z - Z_1;$$

elle prendra la forme

$$dX\,dX_1 + dY\,dY_1 + dZ\,dZ_1 = 0. \tag{12}$$

Supposons que X_1, Y_1, Z_1 soient donnés en fonction du paramètre t, et proposons-nous de déterminer X, Y, Z. On pourra poser

$$X\,dX_1 + Y\,dY_1 + Z\,dZ_1 = U\,dt.$$

Différentions et tenons compte de l'équation (12), il restera

$$X\,d^2X_1 + Y\,d^2Y_1 + Z\,d^2Z_1 = d(U\,dt).$$

Ces deux dernières équations donnent la solution cherchée. Il est vrai qu'elles ne font pas connaître X, Y, Z: mais on prendra Z arbitrairement ou l'on écrira une relation quelconque entre X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1. On pourrait, par exemple, supposer que la courbe lieu du point (x, y, z) soit sur une surface donnée.

Considérons, en terminant, l'équation

$$f(dx, dy, dz, \ldots, dt, du) = 0,$$

où f désigne une fonction homogène des différentielles $dx, \ldots, du$, à coefficients constants ou fonctions de l'une des variables u. On pourra poser

$$dx = a\,du, \quad dy = b\,du, \quad dz = c\,du, \ldots, \quad dt = k\,du,$$

pourvu que les fonctions $a, b, c, \ldots, k$ satisfassent à l'équation

$$f(a, b, c, \ldots, k, 1) = 0$$

et ensuite, $a, b, c, \ldots, k$ étant connus,

$$x = au + \alpha, \quad y = bu + \beta, \ldots,$$

pourvu que les nouvelles fonctions α, β satisfassent aux relations

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db} = \frac{d\gamma}{dc} = \ldots.$$

On intègre ces équations par un procédé analogue à celui qui a été suivi plus haut, dans la résolution de l'équation (10).

Sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement [*];

PAR M. MAURICE LEVY.

I. — OBJET DE CE TRAVAIL ET RÉSUMÉ SUCCINCT DES RÉSULTATS OBTENUS.

1. Les formules ou règles géométriques, d'après lesquelles les Ingénieurs français calculent l'épaisseur des grands murs de soutènement, sont dues au colonel Audoy [**], au général Poncelet [***] et à M. l'Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées de Saint-Guilhem [****]. Elles sont toutes fondées sur cette double hypothèse due à Coulomb, que dans un massif de terre dont l'équilibre se rompt les surfaces de glissement ou de *rupture des terres* sont planes et détachent du massif, des prismes exerçant sur les murs qui les soutiennent des pressions maxima.

En soumettant ces hypothèses à l'analyse, j'ai reconnu que, sauf

[*] Une première rédaction de ce travail a été présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 3 juin 1867. Son insertion au *Recueil des Savants étrangers* a été ordonnée par l'Académie, le 7 février 1870.

[**] *Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 11.

[***] *Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 13.

[****] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX, année 1844.

dans deux cas très-particuliers, elles sont mathématiquement incompatibles. Malgré cela, on éprouve une certaine hésitation à les rejeter à cause de l'autorité des noms qui s'y attachent, et parce qu'elles sont extrêmement ingénieuses, et aussi parce qu'il semble, au premier abord, qu'on ne saurait les abandonner sans les remplacer par d'autres hypothèses plus ou moins douteuses et sujettes à leur tour à être condamnées par une analyse mathématique trop rigoureuse. Il n'en est heureusement pas ainsi; on peut étudier les surfaces de glissement des terres en toute rigueur et sans aucune idée préconçue quant à leur forme ou leur nature. Posée dans ces termes, la question cesse d'appartenir à la Mécanique empirique pour entrer dans le domaine de la Mécanique rationnelle et de la Géométrie. Elle acquiert ainsi un véritable intérêt scientifique, tout en conduisant, dans les cas ordinaires de la pratique, à des formules et à des constructions géométriques notablement plus simples que celles dont les Ingénieurs ont l'habitude de se servir.

C'est ce que je me propose de montrer dans ce travail. En le faisant, je n'abandonne pas ce que je regarde comme véritablement fondamental et fécond dans la pensée de Coulomb : l'idée même d'étudier la poussée des terres au moyen des surfaces de rupture qui s'y produiraient si leur équilibre venait à être brusquement rompu. Cette idée, je la conserve tout entière, mais en la dégageant des hypothèses dont elle est jusqu'ici demeurée enveloppée.

Je commence par étudier la répartition des pressions dans un massif de terre terminé par une surface cylindrique ou prismatique à arêtes horizontales, quelle que soit la forme de la section droite du prisme ou du cylindre.

J'examine ensuite plus particulièrement le cas pratique d'un massif limité par un talus plan indéfini d'une inclinaison quelconque, et je détermine les pressions exercées sur un mur de soutènement plan dans un semblable massif.

Je montre combien mes formules sont simples par rapport à celles que donnent les hypothèses de Coulomb. Enfin je termine en établissant l'incompatibilité mathématique que présentent en général ces hypothèses.

Mon travail est suivi d'une Note résumant les règles pratiques à

suivre pour faire le calcul des pressions que subit un mur de soutènement.

II. — Propriétés générales des terres en équilibre.

2. Nous regardons les terres comme formées de points matériels se succédant d'une manière continue et jouissant, les uns par rapport aux autres, d'une certaine mobilité. Nous ne considérerons (parce que c'est le seul cas pratique) que les masses terminées par des surfaces prismatiques ou cylindriques dont les génératrices sont horizontales; en sorte que, si l'on suppose les terres soumises exclusivement aux actions de la pesanteur, tout se passera de la même manière dans les diverses sections droites du prisme ou du cylindre, et il suffira d'étudier la répartition des forces dans l'une de ces sections. Soit donc (*fig.* 1, n° 3) ACD le profil curviligne ou polygonal de cette section que nous pouvons regarder comme la base d'un cylindre dont les génératrices ont pour longueur l'unité. Traçons-y une courbe quelconque Ca. Nous pouvons, sans troubler l'équilibre, enlever les terres CAa, pourvu qu'en chaque point de la courbe Ca nous appliquions des forces convenables. Ce sont ces forces fictives qui constituent les actions exercées sur les différents éléments de cette courbe. Ces actions sont en général obliques aux éléments plans sur lesquels elles s'exercent, et peuvent se décomposer en une pression normale $\mathfrak{N}$ et une force tangentielle $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ dépendent non-seulement de la position du point m par lequel passe l'élément plan considéré, mais encore de la direction mn de cet élément plan, et tout ce que l'on sait sur ces forces, c'est que, si l'on considère le rapport

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{f}, \tag{1}$$

la fonction $\mathfrak{f}$ est, dans l'état d'équilibre, inférieure ou au plus égale en valeur absolue à un certain nombre f, qui dépend de la nature des terres considérées et que l'on appelle le *coefficient de frottement* de

ces terres sur elles-mêmes ou simplement le coefficient de frottement de ces terres [*].

Si deux molécules infiniment voisines, prises sur la normale à l'élément plan mn, et près de chacune de ses deux faces sont sur le point de se mettre en mouvement l'une par rapport à l'autre, on est certain que la fonction $\mathfrak{F}$ atteint sa limite supérieure f; dans tout autre cas, elle reste au-dessous de cette limite.

Telles sont toutes les notions que l'observation nous fournit *a priori* sur les terres; tout ce que nous dirions de plus serait hypothétique. On comprend que ces notions ne sont pas assez précises pour permettre de trouver toutes les conditions générales de l'équilibre des terres; mais nous verrons qu'elles suffisent pour trouver toutes celles qui intéressent le constructeur.

---

[*] On suppose souvent que si $\mathfrak{N}$ est la pression normale, par unité de surface sur un élément plan, la pression tangentielle $\mathfrak{T}$ ne sera pas simplement

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{F}\mathfrak{N},$$

mais bien

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{F}\mathfrak{N} + \Gamma,$$

$\mathfrak{F}$ et Γ étant deux fonctions telles, que l'on ait en valeur absolue

$$\mathfrak{F}\mathfrak{N} + \Gamma < f\mathfrak{N} + \gamma,$$

la constante f étant le coefficient de frottement des terres et γ une autre constante que l'on appelle leur cohésion.

Mais tous les auteurs, après avoir introduit la constante γ, l'abandonnent dès qu'ils en arrivent aux applications. J'ai préféré simplifier les calculs en l'abandonnant dès le début de ce Mémoire. Ce n'est pas que ma théorie rende cette simplification nécessaire. On pourrait la reproduire tout entière en tenant compte de la cohésion; mais je crois que les praticiens ne doivent pas compter sur cette force pour réduire les dimensions des murs de soutènement; car lorsque les terres offrent de la cohésion, elles la doivent à de l'argile, et alors, loin de produire des poussées plus faibles, elles en produisent de beaucoup plus fortes, en raison des effets physiques que les alternatives de sécheresse et d'humidité produisent sur l'argile. Il faut alors augmenter les dimensions théoriques des murs de soutènement dans des proportions que l'expérience et la nature particulière des terres à soutenir peuvent seules indiquer dans chaque cas spécial.

Cette remarque sera comprise de tous les praticiens.

5. Cherchons d'abord tout ce que nous pouvons déduire de la Mécanique rationnelle, c'est-à-dire exprimons l'équilibre du parallélépipède et du prisme triangulaire élémentaire, suivant la méthode, si pleine d'enseignement dans toutes les questions de Physique mathématique, inaugurée par Cauchy et que M. Lamé a rendue géométriquement si saisissante au moyen de l'ellipsoïde d'élasticité.

Rapportons le système à deux axes rectangulaires Ox et Oy (*fig.* 1), l'un horizontal, l'autre vertical, et dirigé de haut en bas. Considérons en M un rectangle élémentaire dont les côtés dx et dy soient parallèles aux axes (ce rectangle, dans tout ce qui suit, est regardé comme la base d'un prisme dont les arêtes ont l'unité pour longueur.) Soient N_1 et T_1 les actions tangentielle et normale, rapportées à l'unité de surface que subit l'élément superficiel dy, normal aux x; soient N_2 et T_2 les mêmes actions pour l'élément superficiel dx, normal aux y. Outre ces actions, le rectangle M subit l'action de la pesanteur. Si l'on exprime que la somme des moments de toutes ces forces, par rapport au centre du rectangle, est nulle, on trouve aisément

$$T_1 = T_2.$$

Soit T la valeur commune de ces deux forces. Si l'on projette maintenant toutes les forces sur les x et les y, on trouve, en appelant H le poids de l'unité de volume des terres considérées,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dN}{dx} + \frac{dT}{dy} = 0, \\ &\frac{dT}{dx} + \frac{dN}{dy} = H. \end{aligned} \right.$$

Ces deux équations contiennent trois fonctions inconnues : N_1, N_2 et T. Il nous faudrait, entre ces fonctions, une troisième relation. Cette relation, rien dans la définition des terres ne nous la donne; tout ce que nous savons, c'est que les rapports $\frac{T}{N_1}$ et $\frac{T}{N_2}$ sont inférieurs ou au plus égaux au coefficient de frottement f; mais c'est là une condition *d'inégalité*, et ce qu'il nous faudrait, c'est une définition assez précise des terres pour donner une condition *d'égalité* entre T, N_1, N_2. En

l'absence de cette définition, l'une de ces trois fonctions reste arbitraire, sauf les conditions

$$\frac{T}{N_1} \leqq f, \quad \frac{T}{N_2} \leqq f.$$

C'est ce que l'on peut exprimer en disant que, dans les termes où la question est posée, il y a une infinité d'états d'équilibre possibles.

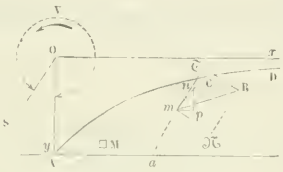
4. Mais je dis maintenant que, parmi tous ces états, il nous suffit, au point de vue des applications aux murs, d'en étudier un seul : c'est *l'équilibre limite* qui a lieu lorsque les terres sont sur le point de se mettre en mouvement. Supposons, en effet, qu'un mur de soutènement ait été établi de façon à résister aux pressions qu'il subit dans cet état d'équilibre particulier que nous appellerons (L); je dis qu'il résistera dans tout autre état d'équilibre (A) des terres. En effet, s'il ne résistait pas dans l'état d'équilibre (A), il chuterait, et les terres se mettraient en mouvement; mais, pour se mettre en mouvement, il faut qu'elles passent par l'état particulier d'équilibre (L) qui se produit immédiatement avant le mouvement; et comme, par hypothèse, le mur résiste dans cet état, il empêchera les terres de le dépasser et les y maintiendra.

Nous n'aurons donc à étudier que les propriétés de l'équilibre particulier (L); or nous allons voir que cet équilibre particulier est complétement défini; que outre les deux équations (2) qui existent pour tout état d'équilibre, il donne une troisième relation entre les fonctions N_1, N_2 et T, en sorte que ces fonctions ne se trouvent plus indéterminées et que les propriétés de cet état d'équilibre peuvent être établies rigoureusement et sans le secours des hypothèses jusqu'ici admises et dont nous montrerons l'inexactitude.

En effet, considérons la masse sur le point de se mettre en mouvement; par chaque point m (*fig.* 1) passera une courbe Cma, suivant laquelle la partie antérieure de la masse tendra à glisser pour se séparer de la partie postérieure. Cette courbe Cma sera caractérisée parce que, suivant un quelconque de ses éléments, le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{f}$ de l'action tangentielle à l'action normale atteindra sa limite

supérieure f; en d'autres termes, l'élément plan mn de cette courbe jouira de la double propriété : 1° que la fonction $\bar{\mathfrak{T}}$ y atteint une valeur absolue maxima, c'est-à-dire plus grande que celle qu'elle a pour tous les autres éléments plans passant au même point; 2° que cette valeur maxima est égale au coefficient de frottement f des terres que nous étudions. En exprimant cette double propriété, nous trouverons la troisième relation que nous cherchons entre les fonctions N_1, N_2 et T. Pour cela, considérons l'équilibre du triangle élémentaire mnp, dont les deux côtés np et mp sont parallèles aux axes des coordonnées et supportent, par conséquent : le premier, les actions tangentielle et normale N_1 et T; le second, les actions tangentielle et normale N_2 et T.

Fig. 1.



Soient $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ les composantes normale et tangentielle de l'action exercée sur l'élément mn; soit V l'angle que cet élément fait avec l'axe des y [*]. En projetant les forces qui agissent sur le triangle mnp, sur mn et sur la normale à mn, et remarquant que la pesanteur n'interviendra pas comme étant proportionnelle à la surface du triangle, soit infiniment petite du second ordre, pendant que les actions sur les côtés du triangle sont du premier ordre, on trouve aisément

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{N} = -T\sin 2V + N_1\cos^2 V + N_2\sin^2 V, \\ \mathfrak{T} = T\cos 2V - \dfrac{N_2 - N_1}{2}\sin 2V, \end{cases}$$

[*] L'angle V se mesure ainsi : par l'origine on mène OS parallèle à l'élément plan mn considéré et dans la partie du plan contenant les y positifs. L'angle V est l'arc compris entre OS et le demi-axe positif des y, l'origine de cet arc étant sur l'axe des y, et l'arc étant parcouru en allant des y vers les x positifs.

ou encore

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{N} = \dfrac{N_1 + N_2}{2} - \dfrac{N_2 - N_1}{2}\cos 2V - T\sin 2V, \\ \mathfrak{T} = -\dfrac{N_2 - N_1}{2}\sin 2V + T\cos 2V; \end{cases}$$

et, par suite, en posant, comme nous l'avons fait plus haut (**2**),

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{f},$$

$\mathfrak{f}$ étant une fonction de x, y et V, dont la plus grande valeur possible est f et la plus petite $-f$,

$$(5)\quad T\cos 2V - \frac{N_2 - N_1}{2}\sin 2V = \mathfrak{f}\left(-T\sin 2V - \frac{N_2 - N_1}{2}\cos 2V + \frac{N_2 + N_1}{2}\right).$$

Posons encore, pour simplifier,

$$(6)\quad \begin{aligned} \mathfrak{f} &= \operatorname{tang}\Phi, \\ f &= \operatorname{tang}\varphi, \end{aligned}$$

Φ sera une fonction de x, y, V dont la valeur maxima sera la constante φ et la valeur minima $-\varphi$. Par suite de cette nouvelle notation, l'équation (5) pourra s'écrire

$$(7)\quad \begin{cases} T\cos(\Phi - 2V) \\ \quad + \dfrac{N_2}{2}[\sin(\Phi - 2V) - \sin\Phi] - \dfrac{N_1}{2}[\sin(\Phi - 2V) + \sin\Phi] = 0. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, nous devons chercher le maximum de la fonction Φ lorsque V prend toutes les valeurs possibles, et écrire que ce maximum est égal à φ. Or le maximum de Φ a lieu pour

$$\frac{d\Phi}{dV} = 0;$$

nous n'aurons donc qu'à remplacer dans (7) la fonction Φ par la constante φ, et écrire que cette équation et sa différentielle par rapport

à V sont satisfaites, ce qui nous donnera les deux relations

$$(8)\quad \begin{cases} T\cos(\varphi - 2V) \\ \quad + \frac{N_2}{2}[\sin(\varphi - 2V) - \sin\varphi] - \frac{N_1}{2}[\sin(\varphi - 2V) + \sin\varphi] = 0, \\ \qquad\qquad 2T\sin(\varphi - 2V) - (N_2 - N_1)\cos(\varphi - 2V) = 0. \end{cases}$$

Si entre ces deux relations on élimine V ou $\varphi - 2V$, on aura la troisième équation cherchée entre les fonctions N_1, N_2 et T. On trouve aisément que cette équation prend la forme très-simple

$$(9)\qquad 4T^2 + (N_2 - N_1)^2 = \sin^2\varphi(N_1 + N_2)^2.$$

Rien ne serait changé à cette équation si l'on remplaçait φ par $-\varphi$, c'est-à-dire si l'on avait cherché le minimum analytique de $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ et exprimé qu'il est égal à $-f$, ce qui a lieu effectivement; car $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ peut varier entre $-f$ et $+f$.

En la combinant avec le groupe (2), on peut trouver N_1, N_2 et T; on déduit de (2), en appelant ψ une fonction entièrement arbitraire de x et de y,

$$(10)\qquad N_1 = \frac{d^2\psi}{dy^2},\quad N_2 = \Pi y + \frac{d^2\psi}{dx^2},\quad T = -\frac{d^2\psi}{dx\,dy},$$

et ces valeurs, portées dans (9), donneront l'équation à laquelle devra satisfaire la fonction ψ. Il restera à intégrer cette équation aux différences partielles du second ordre et à déterminer, d'après les conditions à la surface, les fonctions arbitraires introduites par l'intégration, pour avoir résolu dans toute sa généralité le problème posé.

L'équation en ψ n'est pas, il s'en faut de beaucoup, facile à intégrer dans l'état actuel de la science; encore moins la détermination des arbitraires qui entreraient dans son intégrale peut-elle être effectuée d'une manière générale; mais nous verrons que les trois équations (1) et (9), dont on l'a déduite, comportent une solution en quelque sorte immédiate dans le cas qui se présente le plus ordinairement, on pourrait dire toujours, dans la pratique : celui d'une masse de terre terminée par un talus plan indéfini présentant une inclinaison quelconque.

Toutefois, avant de développer cette importante question, nous devons déduire, des équations que nous venons de trouver, les propriétés générales des terres en équilibre.

5. *Courbes isostatiques; forces principales.* — Les équations (4) donnent l'expression des composantes normale et tangentielle ($\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$) de l'action que subit un élément plan passant en un point quelconque $m(x, y)$ de la masse de terre et ayant une inclinaison V sur la verticale; elles font connaître, par suite, le rapport

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{F} = \operatorname{tang} \Phi$$

donnant l'angle Φ que l'action exercée sur cet élément plan fait avec la normale à ce même élément.

Si l'on considère successivement tous les éléments plans passant en un point, c'est-à-dire si l'on fait varier V, l'angle Φ variera de son côté, et parmi toutes les valeurs qu'il est susceptible de prendre, il en est trois remarquables, à savoir : 1° la valeur $\Phi = 0$, qui correspond à un élément plan ne subissant qu'une pression normale; 2° la valeur $\Phi = \varphi$, qui est la valeur maxima de l'angle Φ; 3° la valeur égale au signe près $\Phi = -\varphi$.

On trouvera la première en posant

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \operatorname{tang} \Phi = 0,$$

ou simplement

$$\mathfrak{T} = 0,$$

soit, d'après la seconde des équations (4),

$$-\frac{N_2 - N_1}{2} \sin 2V + T \cos 2V = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2V = +\frac{2T}{N_2 - N_1}. \tag{11}$$

On déduit de là, pour l'angle 2V, deux valeurs différant entre elles

de 180 degrés, et par suite, pour V, deux valeurs différant entre elles de 90 degrés, c'est-à-dire qu'il existe *en chaque point de la masse des terres deux éléments plans perpendiculaires entre eux et ne subissant que des pressions normales.*

Nous appellerons ces éléments plans les *éléments isostatiques* et les pressions qu'ils subissent et qui leur sont normales *pressions* ou *forces principales.*

Si l'on prolonge les éléments isostatiques de proche en proche dans toute la masse, on tracera au sein de celle-ci deux familles de courbes orthogonales jouissant de la propriété de ne supporter que des pressions normales et que nous appellerons les *lignes isostatiques.*

Ces dénominations sont empruntées à M. Lamé (*Leçons sur l'élasticité des corps solides*); car les propriétés que nous venons d'indiquer existent, non-seulement pour les terres, mais pour toute espèce de matières comme les équations (4) dont elles sont déduites.

6. *Propriétés caractéristiques des terres en équilibre limite.* — Ce qui caractérise les terres et les distingue des autres matières en équilibre, c'est l'équation (9). Essayons de découvrir la propriété qu'elle exprime. Nous remarquerons d'abord que cette propriété est nécessairement indépendante du choix des axes des coordonnées. Du reste, cela est aisé à vérifier; nous avons, en effet, choisi des axes dirigés horizontalement et verticalement; mais comme la pesanteur n'entre pas dans les conditions d'équilibre du triangle élémentaire, il est clair que les équations (4) et toutes celles qui en sont déduites, y compris l'équation (9), subsisteraient, quelle que fût la direction des axes [*]. Or, puisqu'il existe en chaque point deux éléments plans rectangulaires ne supportant que des pressions normales, supposons qu'on ait placé les axes dans les directions qu'ont en un point donné ces deux éléments plans.

Soient A et B les forces principales ou les pressions que subissent ces éléments plans. L'équation (9), appliquée au point dont il s'agit et dans le système particulier d'axes que nous venons de définir,

[*] Cette remarque est essentielle et nous servira souvent par la suite.

s'obtiendra en faisant

$$T = 0,$$

et en remplaçant N_2 et N_1 par A et B. Elle deviendra donc simplement

$$(A - B)^2 = \sin^2\varphi\,(A + B)^2,$$

ou

$$\frac{A - B}{A + B} = \sin\varphi,$$

ou, en supposant $B < A$,

$$(12) \qquad \frac{B}{A} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = m = \text{const.}$$

Ainsi, *en chaque point d'une masse de terre en équilibre limite, le rapport des forces principales est constant, et sa valeur est connue dès qu'on se donne le coefficient de frottement de cette terre.* Il est indépendant de la forme du massif de terre. C'est là la propriété essentielle et caractéristique des terres en équilibre limite [*].

7. *Courbes de glissement.* — Cherchons maintenant les courbes de glissement des terres, c'est-à-dire les courbes suivant lesquelles les différentes parties de la masse se détachent les unes des autres en cas de glissement. D'après la définition que nous avons donnée (4) de l'équilibre limite des terres, l'élément plan suivant lequel se pro-

---

[*] Remarquons que pour $\varphi = 0$ le rapport $\frac{B}{A}$ devient égal à l'unité, c'est-à-dire que les forces principales sont égales, et il est facile de vérifier que, dans ce cas, la pression exercée sur un élément plan quelconque est normale à cet élément, et que les pressions exercées sur les différents éléments plans passant par un point sont égales. Le cas dont il s'agit ici, où le coefficient de frottement $f = \operatorname{tang}\varphi = 0$, est en effet celui des liquides. Ainsi, dans un massif de terre en équilibre, le rapport des forces principales est constant. Ce rapport se rapproche d'autant plus de l'unité que le coefficient de frottement des terres que l'on étudie est plus petit; et à la limite, quand ce coefficient est nul, on retrouve, comme cela doit être, les propriétés des liquides, en sorte qu'un liquide est un massif de terre dont le talus de roideur limite une inclinaison nulle.

duirait le glissement en un point est celui pour lequel le rapport

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{f} = \operatorname{tang} \Phi$$

atteindrait son maximum $f = \operatorname{tang} \varphi$ ou son minimum $f = -\operatorname{tang} \varphi$, c'est-à-dire celui pour lequel Φ atteindrait son maximum φ ou son minimum $-\varphi$; mais cet élément plan est évidemment donné par l'une ou l'autre des équations (8), équations qui, en vertu de (9), rentrent l'une dans l'autre. Prenons la seconde de ces équations pour déterminer l'angle V′ que fait avec la verticale l'élément plan le long duquel le glissement tend à se produire en chaque point de la masse, et nous aurons

$$-2T\sin(\varphi - 2V') + (N_2 - N_1)\cos(\varphi - 2V') = 0$$

pour l'équation différentielle des courbes de glissement.

On déduit de là

$$\operatorname{tang}(\varphi - 2V') = \frac{N_2 - N_1}{2T}. \tag{13}$$

Si l'on multiplie membre à membre cette équation et l'équation (11) qui donne l'inclinaison V sur la verticale des éléments isostatiques, on aura

$$\operatorname{tang} 2V \times \operatorname{tang}(\varphi - 2V') = +1,$$

ou

$$\operatorname{tang}(\varphi - 2V' = \cot 2V;$$

d'où

$$\varphi - 2V' = \frac{\pi}{2} - 2V,$$

ou

$$V - V' = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \tag{14}$$

Ainsi *l'élément plan suivant lequel les terres tendent à glisser forme, avec l'un des éléments isostatiques, un angle* $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, *et, par suite, avec l'autre, un angle égal à* $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$.

Ainsi, *dans tout massif de terre en équilibre limite, les courbes isostatiques et les courbes de glissement se coupent sous un angle constant* qui est connu dès qu'on connaît le coefficient de frottement des terres que l'on étudie.

Si, au lieu de chercher l'élément plan pour lequel on a

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \operatorname{tang}\varphi = f,$$

on cherchait celui par lequel on a

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = -\operatorname{tang}\varphi = -f,$$

il faudrait, dans l'équation (13), remplacer φ par $-\varphi$, ce qui donnerait

$$\operatorname{tang}(\varphi + 2V') = -\frac{N_2 - N_1}{2T};$$

et, par suite, en multipliant membre à membre avec (11),

$$\operatorname{tang}(\varphi + 2V')\operatorname{tang}2V = -1,$$

d'où

$$\operatorname{tang}(\varphi + 2V') = -\cot 2V = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + 2V\right),$$

et

$$(14\ bis) \qquad V' - V = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

qui est l'équation (14) changée de signe.

On obtient donc un élément plan symétrique, par rapport aux lignes isostatiques, de celui pour lequel on a $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = +f$, et qui constitue, comme ce dernier, un élément sur le point de glisser, en sorte *que les terres tendent à se rompre suivant un double système de lignes de rupture.*

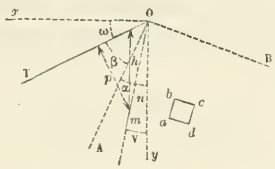
Telles sont les relations les plus remarquables entre les forces qui se développent à l'intérieur des massifs de terre en équilibre, quel que soit le contour qui les termine.

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement le cas où les terres sont terminées par un talus plan indéfini.

III. — Équilibre d'un massif de terre terminé par un talus plan indéfini.

8. *Expressions analytiques des forces qui se développent dans le massif.* — Soient (*fig.* 2) OT le talus qui termine les terres; ω son inclinaison sur l'horizontale; soient enfin Ox, Oy les axes des coordonnées dont le dernier est vertical et dirigé de haut en bas.

Fig. 2.



Les équations d'équilibre sont, comme nous avons vu,

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx} + \dfrac{dT}{dy} = 0, \\ \dfrac{dT}{dx} + \dfrac{dN_2}{dy} = \Pi, \\ 4T^2 + (N_2 - N_1)^2 = \sin^2\varphi\,(N_2 + N_1)^2. \end{cases}$$

Il faut déterminer les fonctions N_1, N_2 et T de façon :

1° Qu'elles satisfassent en tous les points de la masse aux trois équations que nous venons d'écrire;

2° Qu'elles s'annulent le long de la ligne OT.

On satisfera à cette dernière condition en posant

$$(16)\qquad \begin{cases} N_1 = a_1\,(y - x\tang\omega), \\ N_2 = a_2\,(y - x\tang\omega), \\ T \;\; = t\;\;(y - x\tang\omega), \end{cases}$$

a_1, a_2 et t étant trois constantes indéterminées.

On satisfera à la troisième des équations (15), en posant entre ces constantes la relation

$$(17) \qquad 4t^2 + (a^2 - a_1)^2 = \sin^2\varphi\,(a_2 + a_1)^2.$$

Enfin si l'on porte les expressions (16) dans les deux premières équations (15), il viendra

$$(18) \qquad \begin{cases} -a_1 \operatorname{tang}\omega + t = 0, \\ -t \operatorname{tang}\omega + a_2 = \Pi. \end{cases}$$

Si l'on détermine les trois constantes a_1, a_2 et t, d'après les équations (17) et (18), on aura satisfait à toutes les conditions du problème. Or on déduit de (18)

$$a_2 = t \operatorname{tang}\omega + \Pi,$$
$$a_1 = + t \cot\omega.$$

Par suite, (17) devient, après quelques réductions très-simples,

$$t^2 \cos^2\varphi - \Pi \sin 2\omega\,(\cos 2\omega + \sin^2\varphi)\,t + \frac{\Pi^2 \cos^2\varphi \sin^2 2\omega}{4} = 0,$$

$$t = \frac{\Pi \sin^2\omega}{2\cos^2\varphi}\left[\cos 2\omega + \sin^2\varphi \pm \sqrt{(1 + \cos 2\omega)(\cos 2\omega - \cos 2\varphi)}\right].$$

Il faut prendre le radical avec le signe $-$; autrement, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on aurait $t = \infty$, et, par suite, N_1, N_2 et T infinis, ce qui est impossible [*].

---

[*] Ce cas extrême où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, qui est celui d'un massif se tenant à pic, ne peut guère se présenter pratiquement dans les terres dépourvues de cohésion que nous considérons; mais nos équations n'en doivent pas moins s'y appliquer, comme à un cas limite, et il est remarquable que ce cas peut être résolu en termes finis, quel que soit le contour qui limite les terres.

Soit, en effet, $y = \chi(x)$ ce contour, il faut :

1° Satisfaire aux équations (15), où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, en tous les points de la masse;

Si l'on pose, pour simplifier,

$$(19)\quad \cos 2\omega + \sin^2\varphi - \sqrt{(1+\cos 2\omega)(\cos 2\omega - \cos 2\varphi)} = \mathrm{R},$$

il vient

$$t = \frac{\Pi \sin 2\omega}{2\cos^2\varphi}\,\mathrm{R}.$$

Si l'on pose, en outre,

$$(20)\qquad y - x \operatorname{tang}\omega = h,$$

h désignant la distance verticale du point que l'on considère au talus OT, qui termine les terres, il viendra

$$(21)\quad \begin{cases} \mathrm{N}_1 = \dfrac{\Pi h \cos^2\omega}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{R}, \\ \mathrm{N}_2 = \dfrac{\Pi h}{\cos^2\varphi}(\cos^2\varphi + \mathrm{R}\sin^2\omega), \\ \mathrm{T} = \dfrac{\Pi h \sin\omega\cos\omega}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{R}. \end{cases}$$

Et, par suite, les équations (4) donneront, pour les composantes $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ de l'action exercée sur un élément plan faisant avec la verticale l'angle V,

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{N} = \dfrac{\Pi h}{2\cos^2\varphi}\{\cos^2\varphi(1-\cos 2\mathrm{V}) + \mathrm{R}[1+\cos 2(\mathrm{V}+\omega)]\}, \\ \mathfrak{T} = \dfrac{\Pi h}{2\cos^2\varphi}[-\cos^2\varphi \sin 2\mathrm{V} + \mathrm{R}\sin 2(\mathrm{V}+\omega)]. \end{cases}$$

Au moyen de ces équations, le problème est analytiquement résolu. Connaissant les pressions $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ sur un élément plan quelconque pris

---

2° Avoir $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_2 = \mathrm{T} = 0$, pour $y = \chi(x)$. Or on remplit toutes ces conditions en faisant, en tous les points de la masse,

$$\mathrm{N}_1 = \mathrm{T} = 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2 = \Pi[y - \chi(x)].$$

On voit donc que les trois forces N_1, N_2 et T sont loin d'être infinies, puisque, au contraire, deux d'entre elles sont nulles. On voit, de plus, que les lignes isostatiques sont horizontales et verticales, quel que soit le contour qui limite les terres.

dans la masse, on peut calculer les pressions exercées sur une surface quelconque qui y est tracée, comme on les calcule pour les surfaces plongées dans un liquide.

9. *Talus de roideur limite.* — Pour que les diverses formules que nous venons de trouver soient réelles, il faut que le radical que comporte l'expression (19) de R soit lui-même réel, ce qui exige que

$$\cos 2\omega - \cos 2\varphi > 0,$$

ou, comme ω et φ sont des angles aigus,

$$\omega < \varphi.$$

Ainsi l'angle φ est l'angle *du talus de roideur limite*, ce qui est conforme à l'expérience.

Dans les théories existantes, ce résultat est une conséquence immédiate des hypothèses que l'on admet; ici il est obtenu d'une manière entièrement rationnelle.

10. *Les lignes isostatiques et les lignes de glissement sont droites.* — Si l'on veut avoir les lignes isostatiques, il faut poser

$$\mathfrak{E} = 0,$$

ou, en vertu de (22),

$$(23) \qquad -\cos^2\varphi \sin 2V + R \sin 2(\omega + V) = 0.$$

De là on déduit pour V deux valeurs qu'on reconnaît facilement, comme cela doit être, représenter deux directions rectangulaires. Ces valeurs de V sont constantes, c'est-à-dire indépendantes des coordonnées x et y d'où il résulte ; que, *dans un massif de terre terminé par un talus plan indéfini, les lignes isostatiques sont deux systèmes de droites parallèles.*

Et comme nous avons vu (7) que les lignes de glissement coupent les lignes isostatiques sous des angles constants, on conclut que, *dans le massif de terre dont il s'agit, les lignes de glissement sont également des droites parallèles.*

11. *Direction de ces lignes.* — Déterminons maintenant la direction des lignes isostatiques, ce qui entraînera immédiatement la connaissance des lignes de glissement. Il faut, pour cela, résoudre l'équation (23).

Soit $V = \alpha$ l'une des racines de cette équation, la seconde racine sera $V = \frac{\pi}{2} + \alpha$, et l'on aura

$$(23\ bis) \qquad -\cos^2\varphi \sin 2\alpha + R \sin 2(\omega + \alpha) = 0.$$

On déduirait de là facilement la valeur de $\tang 2\alpha$; mais il est beaucoup plus commode de déterminer directement $\tang\alpha$. A cet effet, nous pouvons écrire l'équation (23 *bis*) ainsi :

$$\frac{\sin 2\omega \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\omega}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\varphi}{R},$$

ou

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \sin 2\omega = \frac{\cos^2\varphi}{R} - \cos 2\omega,$$

ou

$$\left(\frac{1}{\tang\alpha} - \tang\alpha\right) \sin\omega \cos\omega = \frac{\cos^2\varphi}{R} - \cos 2\omega;$$

ou, en remplaçant R par sa valeur (19), faisant passer le radical au numérateur, et opérant les réductions qui se présentent,

$$\tang^2\alpha - \frac{2 \tang\alpha}{\cos^2\varphi \sin\omega}\left[\sin^2\varphi \cos\omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega)\sin(\varphi - \omega)}\right] - 1 = 0,$$

et

$$\tang\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-\sin^2\varphi\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{\cos^2\varphi\sin\omega} \\ \pm \dfrac{\sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\omega + \cos^4\varphi\sin^2\omega + \sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega) + 2\sin^2\varphi\cos\omega\sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}}{\cos^2\varphi\sin\omega}; \end{array} \right.$$

ou, en développant le produit $\sin(\varphi + \omega)\sin(\varphi - \omega)$ sous le grand radical et remarquant qu'alors la quantité sous ce radical devient le carré de

$$\sin\varphi\left[\cos\omega + \sqrt{\sin(\varphi + \omega)\sin(\varphi - \omega)}\right],$$

il vient

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\varphi\cos\omega(\pm 1 - \sin\varphi) - (\pm\sin\varphi + 1)\sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{\cos^2\varphi\sin\omega},$$

ou, en séparant les deux racines,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\alpha &= \frac{\sin\varphi\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{(1+\sin\varphi)\sin\omega}, \\ \operatorname{tang}\alpha &= \frac{-\sin\varphi\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{(1-\sin\varphi)\sin\omega}. \end{aligned}\right.$$

Le produit de ces deux racines est égal à l'unité prise négativement, c'est-à-dire qu'elles indiquent deux directions rectangulaires, comme cela devait être. Nous désignerons par la lettre α celle des deux directions qui fait un angle aigu avec la verticale, c'est-à-dire que nous poserons

$$(24\,bis)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\varphi\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{(1+\sin\varphi)\sin\omega} \qquad [*]$$

pour déterminer l'angle que l'une des lignes isostatiques fait avec la verticale. La seconde ligne isostatique sera à angle droit sur la première.

Quant aux lignes de glissement, elles feront (7), expression (14), avec la verticale, l'angle

$$(25)\qquad V = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha.$$

§ 2. *Construction géométrique pour déterminer les lignes isostatiques et par suite les lignes de glissement.* — Il est intéressant d'étudier ce que devient l'équation (24 *bis*) lorsqu'on y change le signe du radical. Cette étude conduit à un procédé géométrique très-simple pour déterminer la direction des lignes isostatiques et, par suite, celle des lignes de glissement. On vérifie aisément, au moyen des formules or-

---

[*] Pour $\omega = 0$, on a $\operatorname{tang}\alpha = \frac{0}{0}$; mais on voit aisément que la véritable valeur est $\alpha = 0$.

dinaires de la Trigonométrie, qu'en changeant dans (24 *bis*) le signe du radical on obtient une expression qui représente la valeur de la ligne trigonométrique $\cot(\omega+\alpha)$ [*], c'est-à-dire que l'on a

$$(24\,ter)\qquad \cot(\omega+\alpha)=\frac{\sin\varphi\cos\omega+\sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{(1+\sin\varphi)\sin\omega}.$$

Multipliant membre à membre les équations (24 *bis*) et (24 *ter*), il viendra

$$(26)\qquad \operatorname{tang}\alpha\cot(\omega+\alpha)=\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}=\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right),$$

ou

$$\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\omega-\alpha\right)=\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Soit (*fig.* 2, n° 8) OA la direction isostatique formant l'angle α avec la verticale, c'est-à-dire soit

$$\mathrm{AO}\,y=\alpha,$$

on aura

$$\mathrm{TOA}=\frac{\pi}{2}-\omega-\alpha,$$

c'est-à-dire que l'angle $\frac{\pi}{2}-\omega-\alpha$ est l'angle que la même ligne isostatique fait avec le talus OT qui termine les terres. Soit β cet angle, on aura

$$\operatorname{tang}\alpha\times\operatorname{tang}\beta=\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

---

[*] On a

$$\cot(\omega+\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tang}(\omega+\alpha)}=\frac{1-\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\omega+\operatorname{tang}\alpha}.$$

Portant dans cette expression la valeur (24 *bis*) de $\operatorname{tang}\alpha$, faisant passer le radical au numérateur, et effectuant les simplifications qui se présentent, on trouve

$$\cot(\omega+\alpha)=\frac{\sin\varphi\cos\omega+\sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{(1+\sin\varphi)\sin\omega}.$$

Cette relation exprime la propriété géométrique suivante :

Si l'on construit une ellipse ayant pour grand axe l'unité (une unité choisie arbitrairement), et pour petit axe la grandeur tang $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ mesurée avec la même unité, grandeur qui est connue dès qu'on se donne le coefficient de frottement des terres; si l'on place la courbe de façon que ses axes coïncident avec les deux lignes isostatiques OA et OB, les deux directions Oy et OT, c'est-à-dire la verticale et le talus qui termine les terres, coïncideront avec deux de ses diamètres conjugués.

Inversement, concevons que l'on ait construit une fois pour toutes un patron d'ellipse ayant pour axes l'unité et la grandeur tang $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$. On veut déterminer la direction des lignes isostatiques d'un massif de terre dont le talus OT fait avec l'horizontale un angle ω. — A cet effet on déterminera dans l'ellipse les deux diamètres conjugués formant entre eux l'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ [*], puis on placera le patron de façon que l'un de ces diamètres coïncide avec la verticale Oy; les directions qu'auront les axes de la courbe ne seront autres que celles des lignes isostatiques.

13. *Expressions des forces qui se développent dans le massif en fonction de l'angle α qui donne la direction des lignes isostatiques.* — Quand on aura trouvé l'angle α donnant la direction des lignes isostatiques, soit par la formule (24 *bis*), soit par la construction géométrique qui vient d'être indiquée, on pourra calculer les composantes $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ sur un élément plan quelconque pris dans l'intérieur de la masse au moyen des formules que nous allons établir maintenant.

Les formules (19) et (22) du n° 8 suffiraient pour calculer ces pressions; mais les formules que nous allons établir en fonction de l'angle α seront plus commodes.

---

[*] Pour cela, sur le grand axe on décrit un segment de cercle capable du supplémentaire de l'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$, c'est-à-dire capable de l'angle $\frac{\pi}{2} + \omega$. Soit M un des points d'intersection de ce segment avec l'ellipse, on joindra le point M aux deux extrémités du grand axe, et l'on aura deux lignes parallèles aux diamètres cherchés.

La première des formules (22) donne l'expression de $\mathfrak{T}$,

$$\mathfrak{T} = \frac{\Pi h}{2\cos^2\varphi}\left\{\cos^2\varphi\,(1-\cos 2V) + R\,[1+\cos 2(\omega+V)]\right\};$$

ou, en remplaçant R par sa valeur tirée de (23 *bis*), n° **11**, savoir :

$$\frac{R}{\cos^2\varphi} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\omega+\alpha)},$$

on aura

$$\mathfrak{T} = \frac{\Pi h}{2}\left\{1 - \cos 2V + \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\omega+\alpha)}\left[1+\cos 2(\omega+V)\right]\right\},$$

ou encore

$$\mathfrak{T} = \frac{\Pi h}{2\sin 2(\omega+\alpha)}\left[\sin 2(\omega+\alpha) + \sin 2\alpha \right.$$
$$\left. - \cos 2V \sin 2(\omega+\alpha) + \sin 2\alpha \cos 2(\omega+V)\right]$$

ou, en développant les deux derniers termes de la parenthèse et supprimant le terme $\sin\alpha\cos 2\omega\cos 2V$, qui disparaît dans ce développement,

$$\mathfrak{T} = \frac{\Pi h}{2\sin 2(\omega+\alpha)}\left[\sin 2(\omega+\alpha) + \sin 2\alpha - \sin 2\omega\cos 2(\alpha - V)\right],$$

ou, en remplaçant les deux premiers termes de la parenthèse par un produit,

$$\mathfrak{T} = \frac{\Pi h\cos\omega}{\sin 2(\omega+\alpha)}\left[\sin(\omega+2\alpha) - \sin\omega\cos 2(\alpha - V)\right];$$

ou encore, en posant

$$h\cos\omega = p,$$

p étant la distance du point considéré au talus, et en développant,

$$\mathfrak{T} = \frac{\Pi p}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega+\alpha)} + \frac{\cos\alpha}{\cos(\omega+\alpha)} - \frac{\sin\omega\cos 2(\alpha - V)}{\sin(\omega+\alpha)\cos(\omega+\alpha)}\right],$$

ou

$$\mathfrak{N} = \frac{\Pi p \sin \alpha}{2 \sin(\omega + \alpha)} \left[1 + \frac{\operatorname{tang}(\omega + \alpha)}{\operatorname{tang} \alpha} - \frac{\sin \omega \cos 2(\alpha - V)}{\sin \alpha \cos(\omega + \alpha)} \right].$$

Or la relation (26) donne

$$(a) \qquad \frac{\operatorname{tang}(\omega + \alpha)}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{1}{m} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

et peut aussi s'écrire

$$(a') \qquad \frac{\sin(\omega + \alpha) \cos \alpha}{\sin \alpha \cos(\omega + \alpha)} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi},$$

d'où, en retranchant les dénominateurs des numérateurs,

$$(b) \qquad \frac{\sin \omega}{\sin \alpha \cos(\omega + \alpha)} = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

En ayant égard à (a) et (b), l'expression de $\mathfrak{N}$ devient simplement

$$\mathfrak{N} = \frac{\Pi p \sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \; \frac{1 - \sin \varphi \cos 2(\alpha - V)}{1 - \sin \varphi}.$$

L'angle $\alpha - V$ n'est autre que l'angle que forme l'élément plan que l'on considère avec l'élément isostatique OA (*fig.* 2); cet angle étant compté positivement ou négativement, suivant que V est plus petit ou plus grand que α.

Soit i cet angle, on aura

$$(27) \qquad \mathfrak{N} = \frac{\Pi p \sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \; \frac{1 - \sin \varphi \cos 2i}{1 - \sin \varphi}.$$

On trouverait par des calculs semblables l'expression de $\mathfrak{T}$. En portant la valeur

$$\frac{R}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\omega + \alpha)}$$

dans l'expression (22) de $\mathfrak{T}$, on aura

$$\mathfrak{T} = \frac{\Pi h}{2 \sin 2(\omega + \alpha)} \left[-\sin 2V \sin 2(\omega + \alpha) + \sin 2\alpha \sin 2(\omega + V) \right],$$

ou

$$\mathfrak{T} = \frac{\Pi h \sin 2\omega}{2\sin 2(\omega+\alpha)} \sin 2(\alpha - V),$$

ou

$$\mathfrak{T} = \Pi p \frac{\sin\omega \sin 2(\alpha - V)}{2\sin(\omega+\alpha)\cos(\omega+\alpha)},$$

ou, à cause de (b),

$$(28) \qquad \mathfrak{T} = \frac{\Pi p \sin\alpha}{\sin(\omega+\alpha)} \frac{\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \sin 2(\alpha - V) = \frac{\Pi p \sin\alpha \sin\varphi}{\sin(\omega+\alpha)(1-\sin\varphi)} \sin 2i.$$

Des équations (27) et (28) on déduit

$$(29) \qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{F} = \operatorname{tang}\Phi = \frac{\sin\varphi \sin 2i}{1-\sin\varphi\cos 2i}.$$

L'angle Φ est, comme on sait, le complément de l'angle que forme un élément quelconque avec la direction de l'action qui s'exerce sur lui. On voit que Φ ne dépend pas de p, mais seulement de i, c'est-à-dire que cet angle reste le même pour une série d'éléments plans parallèles, et qu'ainsi, dans toute section plane, il conserve une valeur constante. Cette valeur est nulle pour

$$i = 0, \quad i = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire pour les éléments isostatiques. On vérifie de plus que cette valeur de Φ est maxima et égale à φ pour

$$i = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

et qu'elle est minima et égale à $-\varphi$ pour

$$i = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right);$$

en sorte que, par chaque point, il passe deux lignes symétriques par rapport à la ligne isostatique OA, faisant avec elle l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ et le

long desquelles le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ atteint en valeur absolue son maximum $\operatorname{tang}\varphi = f$. Cela est conforme aux propriétés générales indiquées au n° **7**.

14. *Forces principales.* — Pour déduire de la formule générale (27) l'expression des forces principales, il suffit d'y faire successivement

$$i = 0, \quad i = \frac{\pi}{2},$$

ce qui donne, B étant la plus petite et A la plus grande de ces forces,

$$B = \Pi \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega+\alpha)} p,$$

$$A = \Pi \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega+\alpha)} \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} p,$$

que l'on peut encore écrire, en ayant égard à la relation

$$\frac{\operatorname{tang}(\omega+\alpha)}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$(30) \qquad \begin{cases} B = \Pi \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\omega+\alpha)} p, \\ A = \Pi \dfrac{\cos\alpha}{\cos(\omega+\alpha)} p. \end{cases}$$

On voit que

$$\frac{B}{A} = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

ce qui vérifie le théorème général établi au n° **6**.

Telles sont les propriétés fondamentales et les expressions très-simples des pressions qui se développent dans un massif de terre terminé par un talus plan. Cette simplicité tient tout entière à ce que les lignes de glissement y sont des droites parallèles. Il devient dès lors intéressant de rechercher si *les massifs terminés par un talus plan sont les seuls qui jouissent de cette propriété essentielle.*

A cet effet, je remarque que, si les lignes de glissement sont des droites parallèles, il en est de même des lignes isostatiques, et réci-

proquement, puisque ces deux systèmes de lignes se coupent, dans toute espèce de massif, sous un angle constant. Tout se réduit donc à chercher les massifs dont les lignes isostatiques sont des droites parallèles. Soient OA et OB les directions des deux systèmes de lignes isostatiques que nous prendrons pour axes de coordonnées; soit α l'angle indéterminé que la ligne OA fait avec la verticale; soient A et B les forces principales. Nous savons que l'on a

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = \tang^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = m.$$

Si nous écrivons les conditions d'équilibre d'un rectangle infinitésimal *abcd* parallèle aux axes, comme les éléments de ce rectangle ne supportent, par hypothèse, que des pressions normales, nous aurons simplement les équations

$$\frac{dA}{dx} = \Pi \cos\alpha,$$

$$\frac{dB}{dy} = \Pi \sin\alpha,$$

OA étant l'axe des x et OB l'axe des y; d'où, à cause de $\frac{B}{A} = m$,

$$A = \Pi\left(x\cos\alpha + \frac{y\sin\alpha}{m}\right),$$

en supposant que l'origine O soit sur la surface qui termine le massif, c'est-à-dire en supposant que, pour $x = y = 0$, on ait $A = 0$. L'équation de cette surface sera $A = 0$, c'est-à dire

$$(c) \qquad x\cos\alpha + \frac{y\sin\alpha}{m} = 0;$$

c'est donc nécessairement une droite.

Donc *les massifs terminés par un talus plan sont les seuls dont les lignes isostatiques et les lignes de glissement soient des droites parallèles.*

Remarquons en passant que, si OT est cette droite et qu'on pose

$$TOA = \beta,$$

son équation pourra encore s'écrire

$$(d) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\beta,$$

d'où, par la comparaison des deux équations (c) et (d),

$$\cos\alpha - \frac{\sin\alpha \operatorname{tang}\beta}{m} = 0,$$

ou

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta = m,$$

propriété que nous avons démontrée au n° **12**, et d'où nous avons déduit une construction géométrique pour les lignes isostatiques.

14 *bis. Résumé de la méthode à suivre dans les applications pour calculer les pressions qui s'exercent sur un élément plan quelconque pris à l'intérieur du massif, et formules nouvelles.* — Résumons ce qui précède.

Étant donné (*fig.* 2) un massif de terre terminé par un talus formant un angle ω avec l'horizontale, le coefficient de frottement $f = \operatorname{tang}\varphi$ de ces terres étant connu, on se propose de trouver la pression normale $\mathfrak{N}$ et la pression tangentielle $\mathfrak{T}$, qui s'exercent, par unité de surface, sur un élément plan mn, formant un angle V avec la verticale, et placé à une profondeur verticale h, au-dessous du talus formant la surface libre, ou, si l'on veut, à une distance p de ce talus.

Pour cela, on commence par calculer un angle auxiliaire α. A la rigueur, il n'est pas nécessaire de connaître la signification géométrique de cet angle, qui représente l'inclinaison sur la verticale de l'un des deux systèmes de lignes isostatiques. Cet angle α pourrait être calculé au moyen de l'équation (24 *bis*), qui fournit l'expression de sa tangente trigonométrique en fonction des données ω et φ du problème; mais cette expression est assez complexe et n'est pas calculable par logarithmes. Nous sommes arrivé à une formule d'une simplicité tout à fait pratique, en prenant pour inconnue l'angle $\alpha + 2\omega$

au lieu de α. Pour établir cette formule, reprenons l'équation (23 *bis*)

$$-\cos^2\varphi \sin 2\alpha + R \sin 2(\alpha + \omega) = 0,$$

où R a la valeur (19), savoir :

$$R = \cos 2\omega + \sin^2\varphi - 2\cos\omega\sqrt{\sin(\varphi + \omega)(\varphi - \omega)}.$$

De cette équation on déduit, en y introduisant l'angle $2\alpha + \omega$,

$$\operatorname{tang}(2\alpha + \omega) = \frac{\sin\omega(\cos^2\varphi + R)}{\cos\omega(\cos^2\varphi - R)},$$

ou, en ayant égard à l'expression de R,

$$\operatorname{tang}(2\alpha + \omega) = \frac{\sin\omega}{\sqrt{\sin(\varphi + \omega)\sin(\varphi - \omega)}};$$

d'où l'on tire, pour $\sin(2\alpha + \omega)$, l'expression très-simple et remarquable

$$\text{(A)} \qquad \sin(2\alpha + \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

Connaissant le talus ω et l'angle des terres donné φ, cette formule fournit immédiatement l'angle α que fait l'une des lignes isostatiques, et, par suite, celui que fait l'autre de ces lignes avec la verticale.

Une fois l'angle α connu, nous rappellerons que les angles que font avec la verticale les deux systèmes de lignes de rupture sont

$$\pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \alpha.$$

Pour trouver ensuite la pression tangentielle $\mathfrak{T}$, il suffira d'employer soit la formule

$$\text{(B)} \qquad \mathfrak{T} = \frac{\Pi h \sin 2\omega}{2\sin 2(\alpha + \omega)} \sin 2(\alpha - V),$$

soit celle

$$\mathfrak{T} = \Pi p \frac{\sin\alpha \sin\varphi \sin 2(\alpha - V)}{\sin(\omega + \alpha)(1 - \sin\varphi)},$$

démontrées au n° **15**. La première est calculable par logarithmes; la seconde devient calculable par logarithmes, si on l'écrit ainsi :

$$(\mathrm{B}_1) \qquad \mathfrak{T} = \Pi p \frac{\sin\varphi}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \sin 2(\alpha - \mathrm{V}),$$

ou ainsi, en vertu de la formule (a') du n° **13** :

$$(\mathrm{B}_2) \qquad \mathfrak{T} = \Pi p \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\cos\alpha}{\cos(\omega + \alpha)} \sin 2(\alpha - \mathrm{V}).$$

On choisira celle de ces formules qu'on jugera la plus commode.

Il restera ensuite à calculer la pression normale $\mathfrak{N}$. On pourrait, pour cela, employer la formule (27) du n° **13**, mais elle n'est pas calculable par logarithmes. Aussi donnerons-nous la formule suivante. Soit posé, comme nous l'avons déjà fait souvent,

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}} = \operatorname{tang}\Phi.$$

Ayant $\mathfrak{T}$, si nous calculons l'angle Φ, la formule (C) donnera $\mathfrak{N}$.

Or la formule (29) donne

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{\sin\varphi \sin 2(\alpha - \mathrm{V})}{1 - \sin\varphi \cos 2(\alpha - \mathrm{V})}.$$

De là on déduit

$$\operatorname{tang}(\Phi + \alpha - \mathrm{V}) = \frac{\dfrac{\sin\varphi \sin 2(\alpha - \mathrm{V})}{1 - \sin\varphi \cos 2(\alpha - \mathrm{V})} + \operatorname{tang}(\alpha - \mathrm{V})}{\dfrac{1 - \sin\varphi \sin 2(\alpha - \mathrm{V})}{1 - \sin\varphi \cos 2(\alpha - \mathrm{V})} \operatorname{tang}(\alpha - \mathrm{V})}$$

ou

$$(\mathrm{D}) \qquad \operatorname{tang}(\Phi + \alpha - \mathrm{V}) = \frac{\operatorname{tang}(\alpha - \mathrm{V})}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

formule très-simple et calculable par logarithmes.

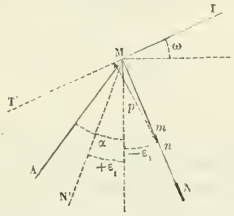
Ainsi, en résumé, par la formule (A), on calculera l'angle auxiliaire α; par la formule (D), l'angle auxiliaire Φ; par l'une des for-

mules (B), (B_1) ou (B_2), la pression $\mathfrak{T}$, et enfin, par la formule (C), la pression $\mathfrak{N}$.

15. *Méthode à suivre pour trouver la pression totale que supporte une section plane.* — Appliquons les formules précédentes à la recherche des pressions exercées sur une section plane.

Soit (*fig.* 3) MN une section plane formant avec la verticale un angle $-\varepsilon_1$. Soient $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ les composantes de la pression rapportées à

Fig. 3.



l'unité de surface exercée en un point m placé à une distance p du talus formant la surface libre. Soit R la résultante de ces pressions et φ_1 l'angle formé par cette résultante avec la normale au plan MN.

Posons

$$f_1 = \operatorname{tang}\varphi_1.$$

Soit MA la direction de celle des deux lignes isostatiques qui forme avec la verticale l'angle aigu α. En appliquant les formules du numéro précédent, où l'on fera

$$V = -\varepsilon_1, \quad \Phi = \varphi_1,$$

nous aurons :

1° Pour trouver l'angle α,

$$\sin(2\alpha + \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi};$$

2° Pour calculer l'angle φ_1,

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 + \alpha + \varepsilon_1) = \frac{\operatorname{tang}(\alpha + \varepsilon_1)}{\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)};$$

3° Pour calculer la pression tangentielle $\mathfrak{T}$,

$$\mathfrak{T} = \Pi p \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\omega)} \sin 2(\alpha + \varepsilon_1);$$

4° Pour calculer $\mathfrak{N}$,

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{T}}{\operatorname{tang}\varphi_1};$$

5° Pour calculer la résultante $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$,

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{T}^2}$$

ou

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{T}}{\sin\varphi_1} = \frac{\mathfrak{N}}{\cos\varphi_1}.$$

Soit R la pression résultante exercée sur la surface totale MN du plan. Toutes les pressions $\mathfrak{R}$ forment avec la normale à ce plan l'angle φ_1; donc la résultante R formera ce même angle avec la normale. De plus, la pression $\mathfrak{R}$ exercée en un point m étant proportionnelle à la distance de ce point au talus libre, *la résultante* R *sera appliquée au tiers de la longueur de la section* MN *considérée.*

Soient, pour avoir la grandeur de R, $Mm = s$; $MN = L$ la longueur totale de la section considérée.

On aura

$$R = \int_0^L \mathfrak{R}\, ds$$

ou

$$R = \Pi \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\omega)} \frac{\sin 2(\alpha+\varepsilon_1)}{\sin\varphi_1} \int_0^L p\, ds.$$

Or

$$p = s \sin OMm = s\cos(\omega - \varepsilon_1);$$

donc

$$\int_0^L p\, ds = \cos(\omega - \varepsilon_1)\int_0^L s\, ds = \frac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{2} L^2,$$

donc

$$R = \frac{\Pi}{2} \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\omega)} \frac{\sin 2(\alpha+\varepsilon_1)\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\sin\varphi_1} L^2.$$

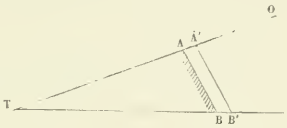
Si la section MN est remplacée par celle MN′, symétrique de la précédente par rapport à la verticale, on devra, dans les formules précédentes, remplacer ε_1 par $-\varepsilon_1$.

16 *Cas particulier d'une section dirigée suivant l'une des lignes de rupture.* — Lorsque la section plane est dirigée suivant une des lignes de rupture, les formules précédentes se simplifient considérablement. Ce cas se présentant plus particulièrement dans la théorie des murs de soutènement dont nous allons nous occuper maintenant, nous en ferons l'examen au Chapitre suivant.

IV. — Stabilité des murs de soutènement.

17. Soit toujours OT le talus droit qui termine une masse de terre (*fig.* 4); nous voulons soutenir ces terres par un mur dont AB est la face postérieure plane; il s'agit de trouver les pressions qui s'exercent sur AB;

Fig. 4.



une fois ces pressions connues, on calculera l'épaisseur à donner au mur d'après les règles ordinaires de la résistance des matériaux. Il semble au premier abord que la solution soit une déduction immédiate de ce qui précède, qu'il suffise de considérer la masse de terre terminée par le talus indéfini OT, de concevoir qu'on fasse dans cette masse une section idéale AB, de calculer, par les équations du paragraphe précédent, les actions tangentielle et normale $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ exercées sur cette surface; puis, à la place de la portion de terre située à gauche de AB, de placer un mur capable de résister aux actions $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ ainsi calculées. Mais on se tromperait étrangement en opérant ainsi. Le mur ne tiendrait en aucune façon

lieu des terres enlevées. En effet, avant que ces terres ne soient enlevées, les actions $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ exercées sur AB sont bien celles données par les formules du paragraphe précédent, et, par suite, le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ ou $\mathfrak{f}$ a la valeur fournie par la formule (29), valeur constante tout le long de AB. A la place des terres, mettons maintenant le mur, et rappelons-nous que nous n'étudions que l'équilibre limite des terres sur le point de glisser; le mur AB ne pouvant glisser que tout d'une pièce, les terres contiguës à AB seront assujetties à glisser le long de cette ligne, condition toute nouvelle à laquelle elles ne seraient pas assujetties sans l'existence du mur. Il en résulte que le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ le long de ce mur est déterminé *a priori;* il est égal au coefficient de frottement f_1 du mur sur les terres, si ce coefficient est plus petit que celui de f des terres sur elles-mêmes, et il est égal à ce dernier si l'on a $f_1 \geqq f$ (*). C'est le cas qui se présente toujours dans la pratique. Ainsi, si le mur AB existe, le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ le long de ce mur est égal à f. S'il n'existe pas, ce rapport a la valeur $\mathfrak{f}$ (29). Si l'inclinaison de AB sur les lignes isostatiques se trouve fortuitement être telle, que

$$\mathfrak{f} = f,$$

le mur remplacera les terres TOB, et la théorie qui précède s'appliquera sans difficulté; dans le cas contraire, la présence du mur change totalement la répartition des forces à l'intérieur de la masse : les lignes

---

[*] Je dis que si f_1 est $> f$, le coefficient de frottement le long du mur AB ne saurait être f_1, bien que les terres glissent le long de cette surface, mais serait égal au coefficient de frottement f des terres sur elles-mêmes. En effet, faisons dans la masse une section A'B' parallèle à AB et infiniment voisine : A'B' étant à l'intérieur des terres, le coefficient de frottement y est au plus f. Or il ne peut pas augmenter de la quantité finie $f_1 - f$ quand on passe de A'B' en AB; donc, en AB, il est aussi f. Ainsi le coefficient de frottement le long de AB est f_1 si l'on a $f_1 < f$ et f, si l'on a $f_1 > f$. Matériellement cela se traduit ainsi : quand f_1 est $< f$, le glissement qui tend à se produire contre la surface AB a lieu effectivement le long de cette surface; mais quand f_1 est $> f$, les terres ne peuvent pas glisser le long de AB; une couche de terre ABA'B' reste adhérente à ce mur, et le glissement tend à se produire suivant A'B'.

isostatiques ne sont plus droites, et la théorie ne peut plus être faite dans l'état actuel de l'analyse.

Ce n'est donc que dans des cas restreints que les formules du Chapitre III peuvent être rigoureusement appliquées à la stabilité des murs de soutènement (*). Dans la pratique, nous verrons aussi comment on peut encore faire usage de nos formules d'une manière approximative en dehors de ces cas.

18. *Application du principe précédent.* — Considérons un massif terminé par un talus MO, présentant une inclinaison quelconque ω.

Soit MA la direction d'un des systèmes de lignes isostatiques, l'angle α, que ces lignes forment avec la verticale, étant donné par l'une ou l'autre des équations

$$\sin(2\alpha+\omega)=\frac{\sin\omega}{\sin\varphi},$$

$$(31)\qquad \operatorname{tang}2\alpha=\frac{\sin\varphi\cos\omega-\sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{(1+\sin\varphi)\sin\omega}.$$

Soit f_1 le coefficient de frottement des terres sur la maçonnerie, et soit $f=\operatorname{tang}\varphi$ le coefficient de frottement des terres sur elles-mêmes; l'angle $\alpha+\varepsilon_1$, que forme avec la ligne isostatique MA la section MN le long de laquelle on a $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}=f$, sera donné (n° **15**), expression (29), par l'équation

$$(32)\qquad \frac{\sin\varphi\sin2(\alpha+\varepsilon_1)}{1-\sin\varphi\cos2(\alpha+\varepsilon_1)}=f_1.$$

Si $f_1<f$, l'inclinaison sur la verticale de la face postérieure du mur de soutènement devra, pour que notre théorie soit rigoureusement applicable, être égale à la valeur que l'on déduit de cette équation pour ε_1.

---

[*] M. de Saint-Venant a montré qu'en dehors de ces cas on peut néanmoins appliquer les formules du n° **14** *bis*, qui donnent alors une approximation par excès, c'est-à-dire des pressions plus fortes que celles qui ont lieu en réalité, de sorte qu'en adoptant ces formules on est amené à donner aux murs de soutènement une résistance un peu supérieure à celle strictement nécessaire (*voir* la Note de M. de Saint-Venant, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*).

Si au contraire, comme cela a lieu effectivement dans la pratique,

$$f_1 > f,$$

l'angle $\varepsilon_1 = \varepsilon$, ε étant donné par l'équation

$$\frac{1 - \sin\varphi \cos 2(\alpha + \varepsilon)}{\sin\varphi \sin 2(\alpha + \varepsilon)} = \operatorname{tang}\varphi;$$

d'où l'on déduira simplement

$$(32\,bis) \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha.$$

Ainsi, quand on aura déterminé l'angle α par l'équation (31), on connaîtra immédiatement, d'après l'équation (32 *bis*), le fruit ε à donner à la face postérieure du mur pour que nos formules s'appliquent rigoureusement.

L'angle ε étant déterminé, la pression sur le mur est donnée par les formules (27) et (28) du n° **13**, lesquelles, avec les notations actuelles, deviennent

$$(33) \qquad \begin{cases} \mathfrak{N} = \dfrac{\Pi \sin\alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \dfrac{1 - \sin\varphi \cos 2(\alpha + \varepsilon)}{1 - \sin\varphi} p, \\ \mathfrak{T} = \dfrac{\Pi \sin\alpha}{\sin(\omega + \alpha)} \dfrac{\sin\varphi \sin 2(\alpha + \varepsilon)}{1 - \sin\varphi} p. \end{cases}$$

ou par la formule du n° **14** *bis*.

Si l'on remplace ε par ses valeurs, tirées de (32 *bis*), qui donne

$$2(\alpha + \varepsilon) = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

il vient

$$(33\,bis) \qquad \begin{cases} \mathfrak{N} = \dfrac{\Pi \sin\alpha}{\sin(\omega + \alpha)} (1 + \sin\varphi) p, \\ \mathfrak{T} = \dfrac{\Pi \sin\alpha}{\sin(\omega + \alpha)} (1 + \sin\varphi) \operatorname{tang}\varphi_1 p = f\mathfrak{N}, \end{cases}$$

équations où l'on remplacera α par sa valeur tirée de (31); mais il est plus simple de calculer directement $\mathfrak{N}$, et, par suite, $\mathfrak{T}$ en fonction des

données du problème, qui sont l'inclinaison ω du talus et l'angle de frottement φ des terres. On déduit, en effet, de la dernière expression de $\mathfrak{N}$,

$$\mathfrak{N} = \frac{\Pi p(1+\sin\varphi)}{\cos\omega(1+\operatorname{tang}\omega\cot\alpha)}.$$

Or on déduit de (31)

$$\cot\alpha = \frac{\sin\varphi\cos\omega + \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{(1-\sin\varphi)\sin\omega},$$

d'où

$$1+\cot\alpha\operatorname{tang}\omega = \frac{\cos\omega + \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{(1-\sin\varphi)\cos\omega},$$

et, par suite,

$$\mathfrak{N} = \Pi p\,\frac{\cos^2\varphi}{\cos\omega + \sqrt{\sin\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}},$$

ou

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{N} &= \Pi p\left[\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}\right],\\ &\text{par suite}\\ \mathfrak{T} &= \mathfrak{N}\operatorname{tang}\varphi = \Pi p\operatorname{tang}\varphi\left[\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}\right],\\ &\text{et}\\ \mathfrak{R} &= \frac{\mathfrak{N}}{\cos\varphi} = \frac{\Pi p}{\cos\varphi}\left[\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}\right],\end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{R}$ étant l'action totale exercée par unité superficielle sur le point du mur placé à la distance p du talus. On voit que $\mathfrak{R}$ est proportionnel à p, d'où cette conclusion : *la résultante $\mathfrak{R}$ des forces qui s'exercent sur la hauteur totale du mur est située au tiers de cette hauteur à partir de la base.*

Pour obtenir cette résultante en grandeur, soit ds un élément linéaire pris sur le mur, on aura

$$ds = \frac{dp}{\cos(\omega-\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{R}\,ds = \frac{\Pi\left[\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}\right]}{\cos\varphi\cos(\omega-\varepsilon)}\,p\,dp,$$

d'où

$$(35)\quad R = \int_0^4 \mathcal{R}\, ds = \frac{\Pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2\cos\varphi}\left[\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}\right],$$

en appelant L la longueur MN du mur. Et si H est la projection de L sur la verticale,

$$(35\,bis)\quad R = \frac{\Pi H^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2\cos\varphi\cos^2\varepsilon}\left[\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}\right].$$

Ces diverses formules, quoique très-simples, peuvent encore être notablement simplifiées. En effet, en remarquant que

$$(36)\quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1-\sin\varphi}} = \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi},$$

on déduit, par des calculs faciles, des formules (31) et (32 *bis*), les suivantes :

$$(37)\qquad \cot(\omega+\alpha) = \frac{\sin\varphi\cos\omega + \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\omega-\omega)}}{(1+\sin\varphi)\sin\omega}$$

et

$$(38)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(\varphi+\varepsilon) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{\varepsilon} - \alpha\right) = \dfrac{\sin\varphi\sin(\varphi+\omega) + \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{\cos\varphi\sin(\varphi+\omega)}, \\ \operatorname{tang}(\omega-\varepsilon) = \operatorname{tang}\left[\omega + \alpha - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right] = \dfrac{\sin\varphi\sin(\varphi+\omega) - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{\cos\varphi\sin(\varphi+\omega)}, \end{cases}$$

dont la première a déjà été donnée au n° **12**.

Si des deux formules (38) on tire $\cos(\varphi+\varepsilon)$ et $\cos(\omega-\varepsilon)$, qu'on les divise l'une par l'autre et qu'on fasse disparaître le radical du dénominateur de la fraction ainsi obtenue, il viendra

$$\frac{\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos(\omega-\varepsilon)} = \frac{\cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{\cos\varphi},$$

ou

$$(39)\qquad \cos\omega - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)} = \frac{\cos\varphi\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos(\omega-\varepsilon)}.$$

Portant l'expression du premier membre de cette équation dans les formules (34), (35) et (35 *bis*), celles-ci deviennent

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{\Pi\cos\varphi\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos(\omega-\varepsilon)}\,p,\\ \mathfrak{C} &= \frac{\Pi\sin\varphi\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos(\omega-\varepsilon)}\,p,\\ \mathfrak{R} &= \frac{\Pi\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos(\omega-\varepsilon)}\,p, \end{aligned}\right.$$

et

$$(41)\qquad R = \frac{\Pi L^2\cos(\varphi+\varepsilon)}{2} = \frac{\Pi H^2\cos(\varphi+\varepsilon)}{2\cos^2\varepsilon}.$$

On ne peut pas désirer des formules plus simples et plus pratiques que celles-ci, et aucune des méthodes empiriques usitées jusqu'ici n'a conduit, il s'en faut de beaucoup, à de tels résultats. Seulement pour faire usage de la formule (41), il faut au préalable calculer ε. On pourrait pour cela recourir aux formules (32) et (32 *bis*); mais en voici une beaucoup plus commode.

En multipliant membre à membre les équations (38 *bis*), il vient

$$\cos(\varphi+\varepsilon)\cos(\omega-\varepsilon) = \frac{\sin(\varphi+\omega)}{2\tang\varphi},$$

ou

$$\cos(\varphi+\omega)\cos(2\varepsilon+\varphi-\omega) = \frac{\sin(\varphi+\omega)}{2\tang\varphi};$$

d'où l'on déduit aisément

$$(42)\qquad \cos(2\varepsilon+\varphi-\omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

Ainsi le calcul de la pression sur un mur de soutènement se réduit à la résolution de l'équation (42) par rapport à ε et à la substitution de ε dans (41). C'est une règle autrement commode que toutes celles que fournissent les méthodes en usage aujourd'hui.

Il n'est pas besoin de remarquer que l'équation (42) permet aussi de calculer α; car, en observant que

$$\varepsilon = \frac{\varpi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha,$$

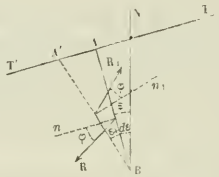
elle devient

$$\sin(2\alpha + \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \tag{43}$$

relation déjà établie au n° **14** *bis*.

19. La simplicité des formules (40) et (41) invite à en chercher une démonstration directe. A cet effet, soit T'T le talus terminal d'un massif indéfini de terre, dont AB est une ligne de glissement formant l'angle ε avec la verticale. Soit R la résultante des actions exercées sur AB par la partie du massif située à sa droite ; R fera avec la normale n

Fig. 5.



à AB l'angle φ de frottement des terres sur elles-mêmes ; de plus, cet angle atteignant suivant la ligne de glissement sa valeur maxima, son accroissement, lorsqu'on passera à une section BA', infiniment voisine et formant avec la verticale l'angle $\varepsilon + d\varepsilon$, sera nul, en sorte que, si R_1 est la résultante des actions exercées sur BA' par la partie de gauche du massif, l'angle de R_1 avec la normale n sera encore φ à un infiniment petit du second ordre près ; donc l'angle aigu des forces R et R_1 sera $d\varepsilon$.

L'angle aigu de R avec la verticale est d'ailleurs, comme on le voit aisément, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \varphi$. D'après cela, si l'on transporte en un même point les forces R et R_1, ainsi que le poids que nous appellerons dP du triangle BAA', et qu'on exprime que ces forces se font équilibre, les règles ordinaires du parallélogramme fourniront la relation

$$\frac{R}{dP} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \varepsilon\right)}{d\varepsilon} = \frac{\cos(\varphi + \varepsilon)}{d\varepsilon}.$$

Or, si AB = L, on a

$$dP = \frac{\Pi L^2 d\varepsilon}{2},$$

et, par suite,

$$R = \frac{\Pi L^2}{2} \cos(\varphi + \varepsilon),$$

expression qui n'est autre que la formule (41). Les formules (40) se déduisent facilement de celles-ci, en remarquant que, l'action $\mathfrak{R}$ exercée par unité de longueur sur un point situé à une distance L du talus, cette distance étant comptée parallèlement à AB, est

$$\mathfrak{R} = \frac{dR}{dL},$$

soit

$$\mathfrak{R} = \Pi L \cos(\varphi + \varepsilon) = \Pi \frac{\cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} p,$$

et, par suite,

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{R} \cos\varphi = \frac{\Pi \cos\varphi \cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} p,$$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{R} \sin\varphi = \frac{\Pi \sin\varphi \cos(\varphi + \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon)} p,$$

ce qui confirme les formules (40).

20. Appliquons nos formules à deux cas extrêmes qui se présentent fréquemment dans la pratique : celui d'un terrain terminé par le talus de roideur limite et celui d'une plate-forme horizontale. Dans le premier cas, je dis que nos formules s'appliqueront rigoureusement, si la face postérieure du mur est verticale, c'est-à-dire si $\varepsilon = 0$. En effet, la formule (31) donne, dans ce cas, c'est-à-dire pour $\omega = \varphi$:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi} = \sqrt{\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

d'où

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

et, par suite,

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha = 0 \text{ [*]}.$$

Les formules (40) et (41) donnent ensuite, pour les charges par unité de longueur en chaque point du mur, et pour la charge résultante,

$$(44) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = \Pi p, \\ \text{et} \\ \mathrm{R} = \dfrac{\Pi \cos\varphi \, \mathrm{L}^2}{2} = \dfrac{\Pi \cos\varphi \, \mathrm{H}^2}{2}. \end{cases}$$

21. *Cas du terre-plein horizontal.* — Dans le cas du terre-plein horizontal, c'est-à-dire pour $\omega = 0$, la formule (31) ou la formule (43) donne

$$\alpha = 0,$$

et, par suite,

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

C'est encore là un cas très-pratique. Si, par exemple, $\varphi = 45$ degrés, comme cela a lieu en général, on a

$$\varepsilon = 22^\circ 30'.$$

Les formules (40) et (41) donnent alors

$$(45) \qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = \dfrac{\Pi \sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} p = \Pi p \operatorname{tang}\varepsilon. \\ \mathrm{R} = \dfrac{\Pi \mathrm{L}^2 \sin\varepsilon}{2} = \dfrac{\Pi \mathrm{H}^2 \sin\varepsilon}{2\cos^2\varepsilon}. \end{cases}$$

22. *Cas d'un talus quelconque.* — Les deux cas que nous venons

---

[*] Valeur que la formule (42) donne immédiatement.

de traiter sont des cas usuels et extrêmes. Pour les valeurs de ω comprises entre zéro et φ, on trouverait pour ε des valeurs comprises entre zéro et $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. Les formules (41) et (42) permettent d'ailleurs toujours de calculer simplement R et ε. Voici un tableau donnant les calculs tout faits pour les terres dont le talus naturel est de 45 degrés; nous avons fait ces calculs non-seulement pour ω compris entre zéro et 45 degrés, mais pour des valeurs de ω comprises entre zéro et — 45 degrés, c'est-à-dire des talus plongeants. Ce cas n'est pas fréquent, mais il peut se rencontrer quelquefois.

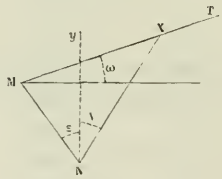
ω	α	$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \alpha$	$\frac{R}{\Pi H}$	OBSERVATIONS.
45°	22°30′	0°	0,35355	
40	12°41′11″	9°48′49″	0,29674	Fig. 6.
30	7°30′	15°	0,26795	
20	4°27′48″	18° 2′12″	0,25043	
10	2° 6′28″	20°23′32″	0,23702	
0	0°	22°30′	0,22416	
—10	—(2° 6′28″)	24°36′28″	0,21077	
—20	—(4°27′48″)	26°57′48″	0,19488	
—30	—(7°30′)	30°	0,17255	
—40	—(12°41′11″)	35°11′11″	0,12758	
—45	—(22°30′)	45°	0,00000	

α est l'inclinaison sur la verticale des lignes isostatiques. Pratiquement, cet élément n'est en général pas nécessaire; ε est l'angle que le parement postérieur du mur doit faire avec la verticale pour que nos formules s'appliquent rigoureusement. Si l'angle que l'on adopte diffère un peu de ε, nos formules doivent être regardées comme seulement approchées. Π est le poids du mètre cube des terres; R la pression appliquée au mur au tiers de sa hauteur H et inclinée à 45 degrés sur sa face postérieure.

23. *Comparaison entre les résultats de notre théorie et ceux de la théorie de Coulomb.* — La théorie de Coulomb suppose, comme on sait, les lignes de glissement planes; notre théorie prouve que, même dans le cas d'un massif terminé par un talus plan et soutenu par un mur, il n'en est généralement pas ainsi; cela n'arrive que dans le cas particulier que notre théorie indique et que la théorie de Coulomb est impuissante à révéler. Hormis ces cas particuliers, on conçoit, et nous le démontrerons plus loin, que les deux théories ne peuvent plus s'accorder et que celle de Coulomb doit être fausse; au contraire, lorsque la condition nécessaire pour que les lignes de glissement soient planes est remplie, on comprend que les deux théories doivent concorder, et nous allons montrer qu'en effet il en est ainsi. Pour cela, établissons les formules résultant de la théorie de Coulomb.

Soient (*fig.* 7) MT le talus des terres faisant avec l'horizon un angle quelconque ω; MN la face postérieure du mur formant avec

Fig. 7.



la verticale l'angle ε; V l'angle yNX du plan de rupture des terres avec la verticale; soient enfin φ et φ' les angles du frottement des terres sur elles-mêmes et sur les maçonneries.

Si l'on décompose le poids P du triangle MNX en deux forces dont l'une fasse un angle φ avec la normale à NX, l'autre un angle φ' avec la normale à MN, on trouve, d'après la règle du parallélogramme des forces, pour l'expression de cette dernière composante,

$$R' = P \frac{\cos(V + \varphi)}{\sin(V + \varepsilon + \varphi + \varphi')}.$$

Or si MN = L, on a

$$P = \frac{\Pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon) \sin(V + \varepsilon)}{2 \cos(V + \omega)},$$

et, par suite,

$$(46) \qquad R = \frac{\Pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2} \frac{\sin(V + \varepsilon) \cos(V + \varphi)}{\cos(V + \omega) \sin(V + \varepsilon + \varphi + \varphi')}.$$

Il faut déterminer l'angle V de façon que cette expression soit maxima. Nous suivrons pour cela la méthode de M. de Saint-Guilhem [*].

Si l'on pose $\cot(V + \varphi) = z$, on pourra écrire

$$R = \frac{\Pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2} \frac{z[\cos(\varepsilon - \varphi) + z \sin(\varepsilon - \varphi)]}{[z \cos(\omega - \varphi) - \sin(\omega - \varphi)][\cos(\varepsilon + \varphi') + z \sin(\varepsilon + \varphi')]},$$

ou en faisant, pour simplifier,

$$(47) \qquad \begin{cases} \dfrac{\Pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon) \sin(\varepsilon - \varphi)}{2 \cos(\omega - \varphi) \sin(\varepsilon + \varphi)} = A, \\ \cot(\varphi - \varepsilon) = a, \\ \operatorname{tang}(\varphi - \omega) = b, \\ \cot(\varphi' + \varepsilon) = -c, \end{cases}$$

on aura

$$(48) \quad R = A \frac{z(z - a)}{(z + b)(z - c)} = \frac{A}{b + c}\left[b + c + \frac{c(c - a)}{z - c} - \frac{b(b + a)}{z + b}\right].$$

Le maximum de R a lieu pour

$$(49) \qquad \frac{z - c}{z + b} = \pm \frac{\sqrt{c(c - a)}}{b(b + a)} = \rho,$$

comme on le voit, en différentiant le troisième membre de l'équation (48). En différentiant le second membre et l'égalant à zéro, on

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX.

trouverait

$$\frac{(a+b)z}{z+b} = \frac{c(z-a)}{z-c},$$

d'où

$$\frac{z(z+a)}{(z-b)(z-c)} = \frac{a+b}{c}\left(\frac{z}{z+b}\right)^2,$$

et

$$R = A\frac{z(z-a)}{(z+b)(z-c)} = \frac{A(a+b)}{c}\left(\frac{z}{(z+b)}\right)^2,$$

ou, en vertu de la formule (49),

$$R = A\frac{a+b}{c}\left(\frac{c+b\rho}{b+c}\right)^2 = \frac{A(a+b)c}{(b+c)^2}\left(1+\frac{b}{c}\rho\right)^2.$$

Si l'on remplace a, b, c par leurs valeurs (47), et qu'on pose

$$\frac{b}{c}\rho = K,$$

on trouve

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} K &= -\sqrt{\frac{\sin(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\omega)}{\cos(\omega-\varepsilon)\cos(\varphi+\varepsilon)}},\\ z &= \cot(V+\varphi) = -\frac{(1+K)\cot(\varphi'+\varepsilon)}{1+K\cot(\varphi'+\varepsilon)\cot(\varphi-\omega)},\\ R &= \frac{\Pi L^2}{2}\frac{\cos^2(\omega-\varepsilon)\cos(\varphi'+\varepsilon)}{\cos^2(\varphi+\varphi'+\varepsilon-\omega)}(1+K)^2\\ &= \frac{\Pi H^2}{2}\frac{\cos^2(\omega-\varepsilon)\cos(\varphi'+\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon\cos^2(\varphi+\varphi'+\varepsilon-\omega)}(1+K)^2. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les équations qui donnent la pression R dans la théorie de Coulomb [*].

On voit combien notre formule générale (35) est simple par rapport à celles qu'il faut calculer dans la théorie de Coulomb.

---

[*] En prenant avec le signe + le radical exprimant K, on trouverait le minimum de R, ce qui correspondrait à ce que M. Poncelet a appelé *la butée des terres*. On s'en assure facilement par le signe de la dérivée seconde de la formule (48).

24. Dans le cas particulier d'un mur dont l'angle de frottement avec les terres est égal ou supérieur à celui des terres sur elles-mêmes, il faut faire $\varphi = \varphi'$, d'où

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{\sin 2\varphi \sin(\varphi-\omega)}{\cos(\omega-\varepsilon)\cos(\varphi+\varepsilon)}} \\ \cot(V+\varphi &= \frac{-(1+K)\cot(\varphi+\varepsilon)}{1+K\cot(\varphi+\varepsilon)\cot(\varphi-\omega)} \\ R &= \frac{\Pi L^2}{2}\frac{\cos^2(\omega-\varepsilon)\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos^2(2\varphi+\varepsilon-\omega)}(1+K)^2 = \frac{\Pi H^2}{2}\frac{\cos^2(\omega-\varepsilon)\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon\cos^2(2\varphi+\varepsilon-\omega)}(1+K)^2. \end{aligned}\right.$$

Ici encore on voit combien ces formules sont compliquées par rapport à nos deux formules (41) et (42). Il serait difficile de prévoir qu'il existe un cas où la dernière (51) peut se réduire à l'expression simple (41), savoir :

$$R = \frac{\Pi L^2}{2}\cos(\varphi+\varepsilon),$$

si ma théorie n'indiquait *a priori* la condition dans laquelle une telle coïncidence est vraisemblable. Cette condition est précisément celle fournie par les formules (32 *bis*), nécessaire pour que les lignes de glissement soient réellement planes. Pour montrer qu'alors les deux théories sont d'accord, soit q le rapport de la valeur de R fournie par la théorie de Coulomb à celle (41) fournie par ma théorie. On aura

$$q = \frac{\cos^2(\omega-\varepsilon)(1+K)^2}{\cos^2(2\varphi+\varepsilon-\omega)},$$

d'où

$$\sqrt{q} = \frac{\cos(\omega-\varepsilon)(1+K)}{\cos(2\varphi+\varepsilon-\omega)} = \frac{1+K}{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi \operatorname{tang}(\omega-\varepsilon)},$$

ou, en vertu de la seconde des formules (38),

$$\sqrt{q} = \frac{1+K}{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\,\dfrac{\sin\varphi\sin(\varphi+\omega) - \sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}}{\cos\varphi\sin(\varphi+\omega)}}.$$

ou

$$\sqrt{q} = \frac{1+K}{1-2\sin\varphi\sqrt{\dfrac{\sin(\varphi-\omega)}{\sin(\varphi+\omega)}}}.$$

Mais on a

$$K = -\sqrt{\frac{\sin 2\varphi \sin(\varphi - \omega)}{\cos(\omega - \varepsilon)\cos(\varphi + \varepsilon)}};$$

et des équations (38) on tire facilement

$$\cos(\omega - \varepsilon)\cos(\varphi + \varepsilon) = \frac{\cos\varphi \sin(\varphi + \omega)}{2\sin\varphi},$$

d'où

$$K = -2\sin\varphi\sqrt{\frac{\sin(\varphi - \omega)}{\sin(\varphi + \omega)}},$$

et, par suite, la dernière expression de $\sqrt{q}$ se réduit à l'unité; ce qu'il fallait démontrer.

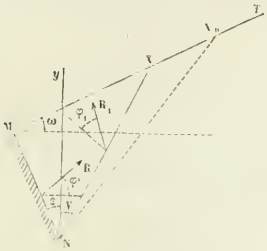
25. Cette démonstration suppose que le coefficient de frottement φ' du mur MN est égal ou supérieur à celui φ des terres; il serait nécessaire de faire une vérification analogue quand $\varphi' < \varphi$ et de faire aussi la vérification sur l'angle V, afin de montrer que la ligne de rupture fournie par la théorie de Coulomb coïncide avec l'une de celles que donne notre théorie. Pour cela il faudrait introduire dans les équations ci-dessus, non plus la condition simple (32 *bis*), mais celle (32) où l'on mettrait tang φ' à la place de f_1, et alors on serait conduit à des calculs presque inabordables pour ramener à la même forme les deux groupes de formules fournis par les deux théories. Mais il est aisé de démontrer *a priori* et d'une manière rigoureuse que chaque fois que les lignes de rupture sont planes, les deux théories coïncident complétement.

A cet effet, soit (*fig.* 7, n° 23) MT le talus des terres formant un angle ω avec l'horizon; soit MN la face postérieure d'un mur dont l'angle de frottement φ' et l'inclinaison ε sur la verticale sont supposés liés entre eux par la relation (32) ou (32 *bis*), suivant que φ' est inférieur à φ, ou égal ou supérieur, de telle façon que les lignes de rupture sont planes. Soit R la réaction que le mur exerce sur les terres et qui fait avec la normale au mur l'angle φ'. Soit NX une section plane prise *tout à fait arbitrairement* et formant l'angle V avec la verticale; désignons par R_1 l'action totale inconnue exercée par le massif sur NX

et par φ_1 l'angle également inconnu de R_1 avec la normale à NX.

En décomposant, comme au n° **20**, le poids du triangle MNX en

Fig. 8.



deux forces, dont l'une soit parallèle à R et l'autre à R_1, on trouverait aisément, en posant MN = L, l'équation

$$(52) \qquad R = \frac{\Pi L^2 \cos(\omega - \varepsilon)}{2} \frac{\sin(V + \varepsilon)\cos(V + \varphi_1)}{\cos(V + \omega)\sin(V + \varepsilon + \varphi_1 + \varphi')},$$

qui n'est autre que l'équation (46), où φ est remplacé par l'angle inconnu φ_1. Cette équation est évidemment rigoureuse, et elle donnerait l'expression exacte de R, si l'on connaissait φ_1 en fonction de V. En portant cette fonction φ_1 dans (52), V disparaîtrait du second membre et R serait complétement déterminé. Je dis que V disparaîtrait du second membre; car il est évident que, quelle que soit la direction NX que l'on choisit, le triangle MNX doit être en équilibre et donnerait pour R l'expression (52), et comme R a une valeur unique et déterminée qui ne saurait dépendre de la direction donnée à NX, il est clair que V disparaîtrait du second membre si l'on y remplaçait φ_1 par sa valeur exacte en V. Par suite, si l'on donne à V un accroissement δV, R ne doit pas varier, c'est-à-dire que l'on a nécessairement

$$(53) \qquad \frac{dR}{dV} + \frac{dR}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dV} = 0.$$

Cette équation et celle (52) sont rigoureuses, quel que soit le mode

d'équilibre du massif et quelle que soit la forme de ses lignes de glissement. Supposons maintenant que les lignes de glissement soient droites et que NX_0 soit une de ces lignes, alors, le long de cette ligne φ_1, atteindra sa valeur maxima φ, c'est-à-dire que l'on aura à la fois

$$(54) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi \\ \text{et} \\ \dfrac{d\varphi_1}{dV} = 0. \end{cases}$$

Par suite, l'équation (53) se réduira à

$$(55) \qquad \frac{dR}{dV} = 0.$$

Les relations (54) et (55), prises ensemble, signifient que, si le massif soutenu par le mur MN a des lignes de glissement planes, pour avoir l'inclinaison γ NX_0 de l'une de ces lignes sur la verticale, il suffit, dans l'équation (52), de remplacer la *fonction* φ_1 de V par la *constante* φ et d'égaler à zéro la dérivée du second membre par rapport à V; et la poussée R sur le mur MN sera précisément celle produite par le triangle MNX_0; en un mot, pour avoir la poussée R et la direction des lignes de glissement, il faut opérer précisément comme on opère d'après la théorie de Coulomb. Celle-ci, dans le cas que nous considérons, est donc exacte comme la nôtre.

Mentionnons, comme corollaire immédiat résumant ce qui précède, la proposition suivante, qui n'a jamais été démontrée, que l'on a toujours admise comme une simple hypothèse :

Lorsqu'un massif soutenu par un mur renferme *effectivement* des lignes de rupture planes, ces lignes sont précisément celles qui détachent du massif les prismes exerçant sur la portion du mur contre laquelle ils s'appuient la poussée maxima.

On comprendra, en lisant le Chapitre suivant, toute l'importance de cette proposition. La théorie de Coulomb comporte deux hypothèses : la première, c'est que les lignes de rupture sont planes; la seconde, c'est que ces lignes détachent les prismes exerçant sur les murs de soutènement les pressions maxima. On voit que celle-ci est

consécutive de celle-là ; si la première était toujours remplie, la seconde le serait nécessairement : elle est donc, en tout cas, inutile.

En terminant ce parallèle entre quelques-unes des formules résultant de notre théorie et les formules générales de la théorie de Coulomb, nous devons faire ressortir ce point essentiel : c'est que, même dans le cas où elle est exacte, où elle coïncide avec la nôtre, la théorie de Coulomb conserve une infériorité capitale; elle ne peut pas à elle seule fournir la condition d'après laquelle on peut reconnaître son exactitude.

Tout ce que nous venons de faire, c'est de montrer que, dans le cas où les lignes de rupture sont planes, la théorie est exacte comme la nôtre; mais comment reconnaître si dans un massif donné les lignes de rupture sont réellement planes? C'est ce que notre théorie peut seule faire au moyen des formules (32) et (32 *bis*), et l'impossibilité où est la théorie de Coulomb de fournir elle-même les symptômes de son exactitude lui ôte tous les avantages pouvant résulter de cette exactitude, puisque rien, dans cette théorie, n'indique au constructeur les conditions dans lesquelles il doit se placer pour obtenir les résultats rigoureux qu'elle est susceptible de donner.

Le cas que nous venons d'examiner est d'ailleurs le seul où la théorie de Coulomb puisse donner des résultats exacts; pour tout terrain autre que celui terminé par un talus plan indéfini, elle est mathématiquement impossible.

C'est par la démonstration de ce fait que nous terminerons notre travail, auquel nous ajouterons ensuite, sous forme de Note, un résumé pratique.

V. — Impossibilité de la théorie de Coulomb telle qu'elle a été appliquée jusqu'ici.

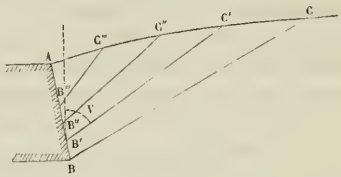
26. La théorie de Coulomb, telle qu'elle a été interprétée par tous les auteurs qui s'en sont servis, consiste à supposer que les lignes suivant lesquelles les terres tendent à glisser sont droites. Il est utile de bien préciser la signification de cette hypothèse.

Soit (*fig.* 9) un massif de terre terminé par la ligne courbe ou brisée AC, et soutenu par un mur dont la face postérieure soit AB.

Tous les interprètes de Coulomb procèdent ainsi pour calculer la

pression exercée sur une portion quelconque AB′ du mur : ils considèrent une section B′C′ partant du point B′ et formant avec la verti-

Fig. 9.



cale un angle inconnu V. Ils admettent que le prisme A B′C′ est soumis à trois forces qui se font équilibre, savoir :

1° Son poids P;

2° La réaction R de la portion considérée AB′ du mur, réaction qu'ils supposent faire avec la normale au mur un angle φ' égal à l'angle du frottement des terres sur le mur;

3° La réaction S que le massif de terre exerce sur la face B′C′ du prisme, réaction qu'ils supposent inclinée sur la normale à B′C′ d'un angle φ égal à l'angle du frottement des terres sur elles-mêmes.

Je dis que cette dernière hypothèse suppose que la droite B′C′ est une des lignes de glissement *telles que je les ai définies*. En effet, j'ai défini les lignes de glissement des lignes telles que l'action exercée sur un *quelconque* de ses éléments fasse avec la normale à cet élément un angle φ égal à l'angle du frottement des terres. Or l'hypothèse consistant à supposer que l'action totale S exercée sur la ligne entière B′C′ fait un angle φ avec la normale à cette ligne revient à admettre que l'action exercée *sur chacun des éléments de cette droite fait aussi un angle φ avec la normale à cet élément;* car si la force agissant sur un seul de ces éléments faisait avec la normale à la droite B′C′ un angle moindre que φ, il faudrait, pour que la résultante S fît un pareil angle avec cette normale, qu'il existât au moins un autre élément sur lequel s'exerçât un effort formant avec cette normale un angle plus grand que φ; or cela est impossible d'après la définition même de cet angle. Ainsi la ligne droite B′C′ est bien censée, dans la théorie dont il s'agit,

être une ligne de glissement dans le sens que j'attache à ce mot. Et, comme on fait le même raisonnement pour toute autre portion AB″ du mur, on voit que l'on admet en principe que les lignes de glissement sont formées par une série de droites telles que BC, B′C′, B″C″, ..., c'est-à-dire qu'on suppose que le lieu des éléments plans pour lesquels le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ atteint son maximum f est formé par une famille de lignes droites.

On détermine la direction de l'une quelconque B′C′ de ces droites en admettant qu'elle détache du massif le prisme AB′C′ exerçant sur la partie du mur contre laquelle il s'appuie une pression maxima, c'est-à-dire une pression plus grande que celle que produirait tout autre prisme s'appuyant contre la même partie du mur. Il résulte de là que la théorie de Coulomb, telle qu'elle a été appliquée jusqu'ici aux terres soutenues par des murs, peut se formuler par les trois propositions suivantes :

1° On ne considère que des massifs de terre sur le point de glisser, c'est-à-dire des massifs tels qu'en chacun de leurs points passe un élément plan pour lequel le rapport $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ atteint sa valeur maxima $f = \tang\varphi$.

2° On admet que les lignes que tracent dans le massif de terre ces éléments plans, prolongées de proche en proche, sont droites; ces lignes sont les lignes de glissement;

3° Que chacune de ces droites détache de la masse des terres le prisme qui exercerait sur la portion du mur de soutènement contre laquelle il s'appuie une pression maxima.

De ces trois propositions, il n'y en a que deux de distinctes; la troisième est en effet une conséquence de la seconde, comme je l'ai montré au n° 22 : il n'y a donc à considérer que les deux premières.

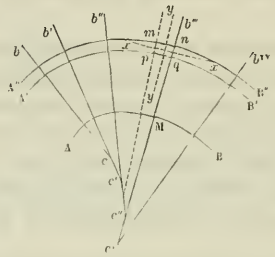
La première est moins une hypothèse qu'une définition; c'est la définition que nous avons donnée de l'équilibre limite; la seconde constitue une véritable hypothèse. Or j'ai démontré (n° 4), que l'état d'équilibre limite est un état complétement défini par lui-même, dont on peut découvrir rationnellement toutes les propriétés, sans le secours d'aucune hypothèse.

L'hypothèse des lignes de rupture planes est donc inutile; c'est une

condition de trop que l'on se donne *a priori*, et je me propose d'établir que cette condition est en général incompatible avec celles que comporte l'équilibre limite.

Admettons en effet, pour un instant, qu'un massif de terre puisse contenir un système de lignes de glissement droites.

Fig. 10.



Soient (*fig.* 10) bc, $b'c'$, $b''c''$,... ces lignes, que nous supposons distribuées dans le massif d'une manière quelconque. Nous pouvons toujours les regarder comme normales à une certaine courbe AB, dont nous pouvons écrire l'équation sous la forme

$$R_0 = F(\theta),$$

R_0 étant son rayon de courbure en un point M, et θ l'angle que la direction de ce rayon de courbure fait avec la verticale.

L'équation d'une courbe A'B', parallèle à AB et distante de celle-ci d'une longueur r, sera

$$R_1 = R_0 + r.$$

Nous pouvons rapporter les divers points du massif à un système de coordonnées curvilignes dont les paramètres seraient r et θ;

$$r = \text{const.}$$

représentera une courbe A'B';

$$\theta = \text{const.}$$

une des lignes cb, $c'b'$, ...

Soient A_1 et T' les composantes de la pression qui s'exerce sur un élément plan nq coïncidant avec le rayon $c'''b'''$;

Soient A_2 et T' les composantes analogues pour un élément plan pq tangent à la courbe $A'B'$.

Écrivons les conditions d'équilibre du rectangle élémentaire $mnpq$. En projetant les forces qu'il supporte, y compris celle de la pesanteur sur les deux droites xx, yy, passant par son centre O et dirigées, celle-ci suivant le rayon qui passe en O, celle-là normalement à ce rayon, on trouvera facilement

$$(56)\quad \begin{cases} (R_0 + r)\dfrac{dA_2}{dr} + \dfrac{dT'}{d\theta} + A_2 - A_1 + \Pi(R + r)\cos\theta = 0, \\ (R_0 + r)\dfrac{dT'}{dr} + \dfrac{dA_1}{d\theta} + 2T - \Pi(R + r)\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Voilà les deux équations d'équilibre fournies par la Mécanique rationnelle dans le système particulier des coordonnées que nous considérons. Il s'agit maintenant d'exprimer l'hypothèse de Coulomb, à savoir que les droites cb, $c'b'$, ... sont des lignes de glissement, c'est-à-dire que l'élément nq jouit de cette *double propriété :*

1° Que le rapport $\frac{T'}{A_1} = \tang\varphi$;

2° Que ce rapport est maximum, c'est-à-dire plus grand que le rapport analogue pour tous les autres éléments plans passant en q. Or si l'on appelle $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ les composantes de la force agissant sur un élément plan faisant un angle V avec l'élément nq, nous obtiendrons ces forces par l'équilibre du tétraèdre et nous aurons des expressions identiques aux équations (4) du n° 4, où l'on remplacerait N_1, N_2, T respectivement par A_1, A_2, T'; et en cherchant l'élément plan pour lequel la double condition de $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}}$ maximum et égal à $\tang\varphi$ soit remplie, on arrivera aux équations (7) et (8), où les mêmes substitutions devront être faites, ce qui donnera

$$T'\cos(\varphi - 2V) + \frac{A_2}{2}[\sin(\varphi - 2V) - \sin\varphi] - \frac{A_1}{2}[\sin(\varphi - 2V) + \sin\varphi] = 0,$$

et

$$-2T'\sin(\varphi - 2V) + (A_2 - A_1)\cos(\varphi - 2V) = 0.$$

Or l'hypothèse des théories existantes consiste à supposer que l'élément nq remplit les conditions qu'expriment ces deux équations, c'est-à-dire que celles-ci sont satisfaites par $V = 0$, ce qui donnera

$$T' \cos\varphi - A_1 \sin\varphi = 0,$$
$$-2T' \sin\varphi + (A_2 - A_1)\cos\varphi = 0,$$

équations dont la première est évidente; car elle exprime l'hypothèse faite que le rapport $\frac{T'}{A_1} = \operatorname{tang}\varphi$, et dont la seconde exprime que ce rapport est maximum. On déduit de ces équations

$$(57)\quad \begin{cases} A_1 = T' \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = T' \cot\varphi, \\ A_2 = T' \dfrac{1 + \sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}, \\ \text{d'où} \\ A_2 - A_1 = 2T' \operatorname{tang}\varphi. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans les équations (56), il viendra

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{1 + \sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}(R_0 + r)\dfrac{dT'}{dr} + \dfrac{dT'}{d\theta} + 2T' \operatorname{tang}\varphi + \Pi(R_0 + r)\cos\theta = 0, \\ (R_0 + r)\dfrac{dT'}{dr} + \dfrac{dT'}{d\theta}\cot\varphi + 2T' - \Pi(R_0 + r)\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Voilà deux équations auxquelles la fonction T' doit simultanément satisfaire pour que les lignes de glissement puissent être planes. On comprend que, en général, cela n'est pas possible et ne peut, en tout cas, avoir lieu que pour des formes déterminées de la surface libre. Voyons s'il existe des formes compatibles avec cette hypothèse. Je retranche la seconde des équations (58) de la première, après l'avoir multipliée par $\operatorname{tang}\varphi$, et il viendra simplement

$$(59)\quad \frac{dT'}{dr} + \Pi(\cos\theta + \operatorname{tang}\varphi \sin\theta).$$

Je retranche la première de la seconde, après avoir multiplié celle-ci par $\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$,

$$(59\ bis)\quad \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{dT'}{d\theta}+\frac{2T'}{\sin\varphi\cos\varphi}-\Pi(R_0+r)\left[\cos\theta+\frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}\sin\theta\right].$$

Pour que les deux dernières équations soient compatibles, il faut que la valeur de $\frac{d^2T'}{dr\,d\theta}$, tirée de l'une et de l'autre, soit la même. Or on déduit de la première

$$\frac{d^2T'}{d\theta\,dr}=-\Pi(-\sin\theta+\operatorname{tang}\cos\theta),$$

de la seconde

$$\frac{d^2T'}{d\theta\,dr}=\Pi\operatorname{tang}\varphi[(2+\sin\varphi\cos\varphi)\cos\theta+(2\operatorname{tang}\varphi+\sin^2\varphi+1)\sin\theta].$$

Il faudrait que ces deux expressions de $\frac{d^2T'}{dr\,d\theta}$ fussent égales, quel que soit θ. Or, pour qu'elles soient égales pour $\theta=0$, il faut que l'on ait

$$4\sin^2\varphi=0,$$

ce qui est impossible, φ étant par hypothèse différent de zéro. Ainsi, quelle que soit la valeur *finie* de R_0, les lignes de rupture ne peuvent pas être planes, c'est-à-dire que, si elles sont planes, elles sont nécessairement parallèles, et nous avons vu (**15**) que cela n'est possible que pour un massif terminé par un talus plan; et, lorsqu'un tel massif est maintenu en équilibre par un mur de soutènement, les lignes de rupture ne sont réellement planes (**17**) que dans le cas où il existe une relation particulière entre la direction du talus et celle de la face postérieure du mur. Ce n'est donc que dans ce dernier cas que l'hypothèse relative à la forme plane des lignes de rupture est exacte; alors la théorie de Coulomb coïncide avec la nôtre. Dans tout autre cas, les deux théories diffèrent, et celle de Coulomb devient mathématiquement inadmissible. Ajoutons, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que, même dans le cas particulier où elle coïncide avec la nôtre, la théorie de Coulomb conserve, outre des formules se présentant sous une forme très-complexe, une infériorité capitale; c'est qu'elle est impuissante à fournir par elle-même les conditions néces-

saires à son exactitude; de sorte qu'en l'employant on peut se trouver en pleine vérité sans avoir aucun indice qui le prouve, de même qu'on peut être en pleine erreur en croyant être dans le vrai. Notre théorie rationnelle n'a pas ces inconvénients : les formules qu'elle donne indiquent par elles-mêmes la condition moyennant laquelle elles peuvent être rigoureusement appliquées aux murs de soutènement; et cette condition, rien, en général, dans la pratique n'empêche le constructeur de s'y conformer exactement ou approximativement. Elle est d'ailleurs susceptible de progrès indéfinis et fera un pas de plus chaque fois que l'analyse rendra possible, dans un nouveau cas, l'intégration exacte ou approchée des équations (2) du n° 5 et (9) du n° 4.

Par ces motifs, et en raison des formules exceptionnellement simples qu'elle donne dès à présent dans les cas les plus usuels, nous pensons qu'elle devra à l'avenir prévaloir dans la pratique et dans l'enseignement.

Aux ingénieurs elle fournira des constructions géométriques extrêmement faciles, dont ils seront même dispensés, ainsi que de tout calcul, par l'emploi de la Table numérique du n° 19, laquelle peut être facilement étendue à des terres dont le talus naturel est différent de 45 degrés. Aux élèves des Écoles d'application elle apprendra plus que la question spéciale qu'elle traite; car elle leur donnera une idée de ce que le constructeur peut attendre, dans une foule de questions, d'une saine application des principes de Cauchy relatifs à l'équilibre du parallélépipède et du tétraèdre élémentaires.

En terminant, qu'il nous soit permis d'adresser tous nos remercîments à l'éminent rapporteur de notre Mémoire à l'Académie des Sciences, M. de Saint-Venant, pour l'attention toute bienveillante avec laquelle il a examiné notre travail et les excellents conseils qu'il nous a donnés. Ces conseils nous ont permis de compléter et de perfectionner, dans une mesure importante, notre première rédaction. En particulier, toutes nos recherches contenues dans les deux derniers Chapitres, sur la comparaison de notre théorie avec celle de Coulomb, ont été provoquées par M. de Saint-Venant [*].

---

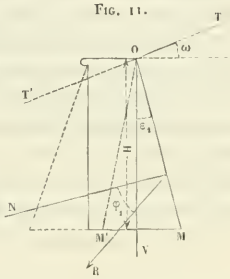
[*] Depuis que ce travail est rédigé, nous avons su que Mackhorn Rankine a déjà, en 1857, obtenu quelques-uns des résultats qui y sont contenus. Nous ne pouvons que nous féliciter de nous être rencontré avec l'éminent et très-regretté professeur de l'Université de Glasgow. La publication de notre Mémoire ne nous en a pas moins paru utile,

NOTE

RÉSUMANT LES RÈGLES PRATIQUES A SUIVRE POUR FAIRE LE CALCUL DES PRESSIONS EXERCÉES SUR UN MUR DE SOUTÈNEMENT.

Soient (*fig.* 11) OM la face postérieure de ce mur et ε_1 l'angle que fait OM avec la verticale OV, cet angle étant pris avec le signe +

Fig. 11.



Données :

ω angle du talus supérieur OT des terres avec l'horizon.

φ angle de frottement des terres sur elles-mêmes, c'est-à-dire inclinaison du talus de roideur limite ou talus naturel des terres.

H poids du mètre cube des terres.

H hauteur verticale du mur de soutènement.

si OM tombe dans l'angle VOT, et remplacé dans toutes les formules ci-dessous par $-\varepsilon_1$, si OM est au contraire dans l'angle VOT', formé par la verticale OV avec le prolongement OT' du talus des terres. C'est ce qui aurait lieu pour le mur marqué en pointillé, dont la face postérieure serait OM'.

1° Si l'on n'a aucune raison de prendre pour ε_1 une valeur déterminée, on prendra

$$(k) \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon,$$

ε étant donné par la formule

$$(k_1) \qquad \cos(2\varepsilon + \varphi - \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi},$$

qui se calcule immédiatement par logarithmes.

---

parce qu'il contient un très-grand nombre de résultats différents de ceux obtenus par Rankine; ce dernier n'a notamment pas aperçu la nécessité de la condition (32), sur laquelle reposent toutes les applications de la théorie aux murs de soutènement, c'est-à-dire toute son utilité pratique. Son Mémoire repose, de plus, sur un principe de moindre action admis *a priori*, tandis que nous ne nous appuyons que sur des principes et des données qui nous semblent d'une incontestable netteté.

L'angle ε étant ainsi déterminé, la pression totale R, exercée sur le mur, est donnée par la formule

$$R = \frac{\Pi H^2 \cos(\varphi + \varepsilon)}{2 \cos^2 \varepsilon}.$$

Cette pression est appliquée au tiers de la hauteur et l'angle φ_1 qu'elle fait avec la normale à la face postérieure du mur est $\varphi_1 = \varphi$.

Ces résultats sont d'ailleurs rigoureusement exacts. Ce sont ceux établis aux n^{os} **18** et **19** de ce Mémoire.

Si l'on a une raison de se donner *a priori* l'angle ε_1 de telle façon que cet angle ne satisfasse plus à la formule (k) ci-dessus, alors on suivra les règles suivantes, qui ne sont plus qu'approchées, mais qui donnent toujours, comme M. de Saint-Venant l'a établi dans une Note insérée au tome XV du *Journal des Mathématiques pures et appliquées* (*voir* encore les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en date des 7 et 14 février 1870), des résultats approchés par excès.

On calculera d'abord un angle auxiliaire α par la formule

$$\sin(2\alpha + \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

L'angle φ_1 de la résultante R avec la normale à la face postérieure sera ensuite donné par l'expression

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 + \varepsilon_1 + \alpha) = \frac{\operatorname{tang}(\varepsilon_1 + \alpha)}{\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

La résultante elle-même sera

$$R = \frac{\Pi H^2 \cos(\omega - \varepsilon_1)}{4 \cos^2 \varepsilon_1} \frac{\sin\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha + \omega)} \frac{\sin 2(\alpha + \varepsilon_1)}{\sin\varphi_1}.$$

Cette force est toujours appliquée au tiers de la hauteur du mur. (Ces formules sont celles démontrées au n° **16** de ce Mémoire.)

Détermination des fonctions entières irréductibles, suivant un module premier, dans le cas où le degré est égal au module;

PAR M. J.-A. SERRET.

1. Dans un travail qui fait partie du tome XXXV des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, et dont la troisième édition de mon *Algèbre supérieure* reproduit les résultats, j'ai montré qu'on peut obtenir immédiatement une fonction entière du degré ν irréductible suivant le module premier p, lorsque le nombre ν ne renferme aucun facteur premier différent de ceux qui divisent $p-1$, et aussi lorsque ce degré est précisément égal au module.

Je me propose ici de revenir sur le dernier de ces deux cas, et d'exécuter la décomposition de la fonction $x^{p^p}-x$ en facteurs irréductibles suivant le module p. Posons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X_\mu = x^{p^\mu} - \frac{\mu}{1}x^{p^{\mu-1}} + \ldots + (-1)^k \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2\ldots k}x^{p^{\mu-k}} + \ldots \\ + (-1)^{\mu-1}\frac{\mu}{1}x^p + (-1)^\mu x, \end{aligned}\right.$$

il est évident que l'on aura

$$(2)\qquad X_{\mu+1} \equiv X_\mu^p - X_\mu \pmod{p}.$$

Multiplions entre elles les $p-1$ congruences comprises dans la formule (2) quand on attribue à μ les valeurs $1, 2, 3, \ldots (p-1)$, et divisons ensuite la congruence résultante par $X_2 X_3 \ldots X_{p-1}$, il viendra

$$(3)\qquad X_p \equiv X_1(X_1^{p-1}-1)(X_2^{p-1}-1)\ldots(X_{p-1}^{p-1}-1) \pmod{p};$$

mais la formule (1) donne

$$X_1 = x^p - x, \quad \text{et} \quad X_p \equiv x^{p^p} - x \pmod{p},$$

en sorte que le quotient V de X_p par X_1 est égal au produit de toutes les fonctions entières irréductibles de degré p; on a, par la formule (3),

$$(4)\qquad V \equiv (X_1^{p-1}-1)(X_2^{p-1}-1)\ldots(X_{p-1}^{p-1}-1) \pmod{p},$$

et l'on sait d'ailleurs que

$$(5)\qquad X_\mu^{p-1} - 1 \equiv (X_\mu - 1)(X_\mu - 2)\ldots(X_\mu - \overline{p-1}) \pmod{p}.$$

Ainsi chacun des facteurs $X_\mu^{p-1} - 1$ de V est, d'après la formule (5), le produit de $p - 1$ facteurs $X_\mu - g$, où g a les valeurs $1, 2, \ldots (p-1)$, et chacun de ces facteurs $X_\mu - g$ est lui-même le produit de $p^{\mu-1}$ facteurs irréductibles du degré p. En particulier, le facteur $X_1^{p-1} - 1$ est le produit des $p - 1$ polynômes irréductibles

$$x^p - x - g, \tag{6}$$

que j'ai considérés dans le Mémoire cité.

2. Les fonctions entières irréductibles du degré p peuvent être distinguées en $p - 1$ genres, en comprenant dans le $\mu^{ième}$ genre toutes celles dont $X_\mu^{p-1} - 1$ est le produit. Le premier genre comprend les $p - 1$ fonctions (6).

Soit i une racine de la congruence irréductible

$$i^p - i - 1 \equiv 0 \pmod{p}, \tag{7}$$

les racines de cette congruence seront

$$i, \quad i+1, \quad i+2, \ldots, \quad i+p-1,$$

et il est évident que les p racines de la congruence

$$x^p - x - g \equiv 0 \pmod{p}$$

seront

$$gi, \quad g(i+1), \quad g(i+2), \ldots, \quad g(i+p-1),$$

en sorte que les fonctions irréductibles du premier genre sont caractérisées par cette circonstance que leurs *racines* sont des fonctions linéaires de i.

Je dis que généralement *les fonctions du $\mu^{ième}$ genre ont pour racines des fonctions entières de i du degré μ.*

En effet, considérons une telle fonction, et désignons par

$$f(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_{p-1} i^{p-1} \tag{8}$$

l'une des racines de la congruence obtenue en l'égalant à zéro, suivant le module p. D'après ce qui a été dit plus haut, $f(i)$ sera racine de la congruence $X_\mu \equiv g \pmod{p}$, dans laquelle g a une valeur convenable. Exécutant la substitution et observant que $[f(i)]^{p^m} \equiv f(i^{p^m}) \equiv f(i+m) \pmod{p}$, il viendra

$$f(i+\mu) - \frac{\mu}{1} f(i+\mu-1) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} f(i+\mu-2) - \ldots$$
$$+ (-1)^{\mu-1} \frac{\mu}{1} f(i+1) + (-1)^\mu f(i) \equiv g \pmod{p}.$$

Cette congruence est nécessairement identique, car son premier membre est un polynôme en i de degré inférieur à p; d'ailleurs ce premier membre est la différence $\mu^{ième}$ de $f(i)$ relative à la différence constante 1 attribuée à i; donc, puisqu'il se réduit à la constante g différente de zéro, le degré de $f(i)$ est précisément égal à μ; on a, en conséquence,

$$a_\mu = \frac{g}{1.2\ldots\mu} \quad \text{et} \quad a_{\mu+1} = a_{\mu+2} = \ldots = a_{p-1} = 0.$$

5. Il est aisé d'obtenir les fonctions irréductibles des différents genres. Supposons que les p coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ de la formule (8) restent indéterminés, en excluant le cas où $f(i)$ se réduirait à la constante a_0, et considérons la congruence

$$(9) \qquad i^\lambda [f(i) - x] \equiv 0 \pmod{p},$$

dans laquelle λ prendra les p valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Si l'on rabaisse au-dessous de p les exposants de i, en faisant usage de la congruence (7), la formule (9) donnera p congruences, dont les premiers membres seront des fonctions homogènes et linéaires des puissances $i^0, i^1, i^2, \ldots, i^{p-1}$. En égalant à zéro, suivant le module p, le déterminant $F(x)$ formé avec les coefficients de ces puissances de i, on obtiendra la congruence irréductible dont les racines sont

$$(10) \qquad f(i), \quad f(i+1), \ldots, \quad f(i+p-1);$$

$F(x)$ sera donc une fonction entière irréductible du degré p.

Si l'on fait, pour abréger l'écriture,

$$a_k + a_{k-1} = a'_k,$$

et qu'on regarde a_p comme équivalant à a_0, en sorte que a'_0 représente $a_0 + a_{p-1}$, on trouve immédiatement

$$(11) \quad F(x) = -\begin{vmatrix} a_0 - x, & a_1, & a_2, \ldots, & a_{p-3}, & a_{p-2}, & a_{p-1}, \\ a_{p-1}, & a'_0 - x, & a_1, \ldots, & a_{p-4}, & a_{p-3}, & a_{p-2}, \\ a_{p-2}, & a'_{p-1}, & a'_0 - x, \ldots, & a_{p-5}, & a_{p-4}, & a_{p-3}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots, \\ a_3, & a'_4, & a'_5, \ldots, & a'_0 - x, & a_1, & a_2, \\ a_2, & a'_3, & a'_4, \ldots, & a'_{p-1}, & a'_0 - x, & a_1, \\ a_1, & a'_2, & a'_3, \ldots, & a'_{p-2}, & a'_{p-1}, & a'_0 - x. \end{vmatrix}$$

Telle est l'expression générale des fonctions irréductibles du degré p suivant le module p.

Si l'on veut avoir les fonctions du $\mu^{ième}$ genre, on fera

$$(12) \qquad a_{\mu+1} = 0, \quad a_{\mu+2} = 0, \quad \ldots, \quad a_{p-1} = 0,$$

et l'on peut supposer aussi

$$(13) \qquad a_{\mu-1} = 0.$$

En effet, la congruence $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$ est celle dont dépendent les racines (10); or, parmi ces expressions (10), il y en a une, $f(i+\lambda)$, dans laquelle le coefficient de $i^{\mu-1}$ est congru à zéro, et rien n'empêche de substituer dans notre analyse $f(i+\lambda)$ à $f(i)$.

Ayant donc égard aux équations (12) et (13), si l'on attribue aux coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-2}$ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$ et à a_μ les mêmes valeurs, zéro excepté, la formule (11) fera connaître les $(p-1)p^{\mu-1}$ fonctions irréductibles du $\mu^{ième}$ genre.

Si on fait l'application au cas de $\mu = 1$ et à celui de $\mu = 2$, on trouvera :

1° Pour $\mu = 1$, $\quad F(x) = x^p - x - a_1$;

2° Pour $\mu = 2$, $\quad F(x) = (x - a_0)\left[(x - a_0)^{\frac{p-1}{2}} - a_2^{\frac{p-1}{2}}\right]^2 - a_2$.

4. Parmi les fonctions du $(p-1)^{ième}$ genre, il faut remarquer celles qui répondent au cas où les coefficients de la formule (8) sont nuls, à l'exception de a_0 et a_{p-1}; ces fonctions ont pour expression

$$F(x) = (x - a'_0)^p + a_{p-1}[(x - a'_0)^{p-1} - 1],$$

et elles ont cette propriété que les racines de la congruence $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$ sont des fonctions rationnelles et linéaires de l'une d'entre elles. Effectivement, la congruence dont il s'agit peut, si l'on y introduit la racine a'_0, se mettre sous la forme

$$x^p \equiv \frac{(a_{p-1} + a'_0)x - a'^2_0}{x + (a_{p-1} - a'_0)} \pmod{p},$$

et l'on sait d'ailleurs que ses racines peuvent être représentées par $x, x^p, x^{p^2}, \ldots, x^{p^{p-1}}$.

Recherches sur les principes de la Mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits;

PAR M. J. BOUSSINESQ [*].

1. Les progrès des sciences physiques tendent à ne montrer, dans tous les faits accessibles à nos sens, que de simples mouvements de la matière, et l'on sait notamment que les circonstances qui accompagnent la propagation de la lumière et de la chaleur rayonnante d'une part, et, d'autre part, les phénomènes calorifiques offerts par les corps, ne peuvent s'expliquer qu'en admettant une agitation très-vive, bien qu'imperceptible, d'un fluide subtil appelé *éther*, répandu dans tout l'espace intra-stellaire, et aussi des particules les plus petites des corps eux-mêmes. De très-belles théories, concernant des classes plus ou moins restreintes de faits, ont été successivement émises depuis cinquante ans; mais je ne pense pas qu'il ait encore paru un travail où l'on explique à la fois, sans hypothèses contradictoires et avec assez de précision pour établir les lois mathématiques révélées par l'expérience, l'ensemble des phénomènes qui se rattachent aux mouvements perceptibles des corps, à leurs vibrations calorifiques, et enfin à la transmission, sous forme d'ondes, de la chaleur rayonnante et de la lumière. Essayer de donner cette explication générale, tel est le but des recherches que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, et dont le lecteur voudra bien, en vue de la difficulté du problème et de l'utilité du résultat à atteindre, me pardonner l'imperfection.

[*] Mémoire présenté à l'Académie des Sciences et des Lettres de Montpellier, le 8 juillet 1872.

2. Après avoir rappelé les notions de point matériel, de vitesse, d'accélération, et avoir montré que, dans un système indépendant de tout autre, les accélérations doivent varier seulement avec les positions relatives actuelles des diverses parties, je pose comme *postulatum* fondamental de la Mécanique la grande loi expérimentale de la conservation des forces vives ou de l'énergie. De ce principe se déduisent immédiatement les équations générales de la Dynamique réelle, équations dans lesquelles les forces ne paraissent que comme des produits d'une masse par une accélération, sans qu'on ait à s'occuper des rapports métaphysiques qu'elles peuvent avoir avec les puissances inconnues qui meuvent la matière, ou encore avec les phénomènes intérieurs appelés *sensations de traction*, *de compression*, *d'effort*, etc., qui résultent en nous de déplacements moléculaires, volontaires ou non, opérés dans nos organes.

Je suis conduit à admettre que l'action d'un point sur un autre est dirigée suivant leur droite de jonction, égale et contraire à la réaction du second sur le premier, et a pour valeur la dérivée, par rapport à leur distance, d'une certaine fonction de toutes les distances mutuelles des points du système. Cette dérivée doit en général dépendre, non-seulement de la distance des deux points considérés, comme le voudrait une opinion très-répandue basée sur le désir de trouver simples les lois naturelles, mais encore des distances des points matériels voisins, s'il en existe. En d'autres termes, rien ne prouve que l'action de deux points ne puisse pas être influencée par la présence d'un certain nombre d'autres, et que l'on ne doive pas admettre comme possibles, en Mécanique moléculaire, des actions et réactions de présence. De telles influences n'ont rien d'invraisemblable *a priori*, car il est très-naturel, par exemple, que la matière située entre deux atomes gêne leur action réciproque, et d'autant plus que sa densité est plus grande. Les faits se rattachant à la *gravitation* prouvent, il est vrai, que les attractions exercées à des distances perceptibles obéissent sensiblement aux lois plus simples de Newton; mais, d'après ce que tendent à montrer des raisons théoriques, cette simplification paraît provenir uniquement de ce que la grandeur relative des distances dont il s'agit permet de développer, par la série de Taylor, et de réduire même à leur partie linéaire certaines fonctions des inverses de leurs carrés. Les actions de

présence, ne s'exerçant ainsi qu'à des distances insensibles, ne rendent ni plus longue ni plus difficile la démonstration d'aucune des lois généralement admises au sujet des pressions, forces élastiques, énergie potentielle, etc., et rien, de ce côté, ne s'oppose à leur admission.

Après avoir établi, de ce nouveau point de vue, l'existence et les propriétés des quantités qui ont reçu les noms d'*énergie potentielle interne* et d'*énergie interne totale*, j'essaye d'exposer le mode probable d'action de l'éther, soit dans les mouvements vibratoires, lumineux ou autres, qui se font par ondes régulières et où les molécules pondérables se déplacent trop peu pour que leurs actions réciproques y jouent un rôle appréciable, soit au milieu de l'agitation bien plus compliquée dont la demi-force vive constitue la chaleur sensible possédée par un corps, et dans laquelle les molécules pondérables exécutent d'assez larges oscillations pour que leurs actions réciproques y dominent. Je m'occupe surtout ici des phénomènes qui se rattachent à ces derniers mouvements, ceux qui se font par ondes ayant été étudiés en détail et ramenés à un point de vue unique dans plusieurs Mémoires sur la lumière, insérés au *Journal de M. Liouville* [*].

La diversité des rôles alternativement joués par l'éther, qui possède incomparablement plus ou incomparablement moins de force vive que la matière pondérable, suivant qu'il s'agit d'un mouvement de la

---

[*] *Théorie nouvelle des ondes lumineuses, Étude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction dans les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux*, addition au Mémoire intitulé: *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIII, 1868); *Sur les lois qui régissent, à une première approximation, les ondes lumineuses propagées dans un milieu homogène et transparent d'une contexture quelconque* (même journal, t. XVII, 1872). On peut voir aussi, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXXIV, 24 juin 1872, p. 1573), un article *Sur la vitesse de la lumière dans les corps en mouvement;* au *Journal de Mathématiques* de 1868 (t. XIII), un Mémoire *Sur les ondes dans les milieux isotropes déformés;* aux §§ VIII et IX de la *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Savants étrangers*, t. XX, 1872), des considérations et une étude analytique de la diffraction, applicables à l'optique; enfin, au tome XXV (4e série, 1872) des *Annales de Chimie et de Physique*, un intéressant Mémoire de M. de Saint-Venant *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*. On trouvera d'ailleurs, à la suite des Recherches actuelles, une exposition synthétique des principes de la même théorie.

première espèce ou d'un mouvement de la seconde, s'explique par l'extrême petitesse de sa densité. Cette petitesse excessive permet aussi : 1° d'expliquer l'énorme vitesse de propagation des ondes lumineuses sans qu'on ait besoin d'attribuer à l'éther une élasticité comparable à celle de la matière pondérable ; et 2° de regarder comme négligeables, dans tous les phénomènes calorifiques, l'énergie possédée par cet agent ainsi que les actions de présence qu'il pourrait exercer sur l'énergie propre de la matière pondérable. Par suite, l'expression des quantités d'énergie interne ou de chaleur contenues dans un corps où règne une agitation d'une intensité supposée connue n'est pas rendue plus compliquée par l'intervention de l'éther ; ce milieu ne peut pas, à cause de sa faible masse, en détenir des quantités sensibles et il ne fait que la transporter rapidement, par petites charges, d'un corps à l'autre du système, de manière à tendre à établir entre eux et avec lui-même une sorte d'équilibre dynamique appelé *équilibre des températures*. Un corps se trouve toujours à une certaine température qui caractérise son état calorifique, et qui est elle-même une quantité ayant ses variations d'un instant à l'autre, régies par une équation importante. C'est cette équation, présentée sous sa forme la plus simple, qu'on appelle *formule fondamentale de la Thermodynamique*. Je pense avoir apporté à sa démonstration une plus grande rigueur, en faisant voir que le travail des forces exercées sur la surface d'un corps ne se réduit pas à celui de leurs résultantes ou *pressions*, mais contient en outre une partie indépendante des mouvements perceptibles de la surface, dépendant au contraire des vibrations calorifiques, et qui représente précisément ce qu'on appelle la *chaleur cédée au corps*.

3. On sait que la matière pondérable peut affecter, suivant la température et la pression auxquelles on la soumet, les deux formes d'un *solide* ou d'un *fluide*, la seconde forme comprenant elle-même les deux états *liquide* et *gazeux*. Or des considérations plausibles permettent de prévoir et d'établir la plupart des lois qui conviennent à ces états et de celles qui régissent le passage des corps de l'un à l'autre, mais à la condition d'admettre les actions de présence dont il a été parlé plus haut. A l'aide d'une analyse très-simple, applicable en toute rigueur au cas d'un corps isotrope peu écarté de son état pri-

mitif d'équilibre stable, mais dont les résultats sont si naturels qu'une induction légitime permet de les étendre, en généralisant un peu leur forme, au cas d'un corps quelconque, je parviens, en effet, à reconnaître, dans l'expression de l'action réciproque de deux molécules, deux parties distinctes : l'une, fonction de leur distance primitive et de leur écartement, est la force, constituant la *solidité*, qui a été admise par Navier, Lamé et Clapeyron, dans leurs Mémoires sur l'élasticité des corps solides, et qui disparaît quand les limites d'élasticité sont dépassées; la seconde, fonction de la distance actuelle et de la densité actuelle, produit, par ses résultantes sur tout élément plan mené dans un corps, une pression normale simplement fonction de la température et de la densité; elle existe dans les solides, dont elle modifie généralement les forces élastiques normales, et subsiste seule dans les autres corps, qui sont par le fait même des fluides.

Le passage de l'état solide à l'état liquide par voie de fusion s'effectue quand le rapport, aux distances primitives des molécules très-voisines, de leurs écarts produits par l'agitation calorifique dépasse la très-petite valeur maximum au delà de laquelle la rupture a lieu; et la chaleur latente ou perte de chaleur sensible, observée, soit dans ce cas, soit quand on opère par voie de dissolution, provient de l'anéantissement des forces constituant la solidité, qui cessent de concourir à l'entretien des vibrations calorifiques. Il en est autrement lors du passage d'un corps à cet état de grande dilatation qu'on appelle état gazeux : l'accroissement considérable du volume suffit pour expliquer la grande augmentation que subit alors l'énergie potentielle interne.

On conçoit que l'action réciproque de deux molécules, dont l'expression paraît être, dans les fluides en général, une fonction compliquée de leur distance et de la densité, tende vers une forme simple, par rapport à la densité, à mesure que celle-ci devient plus petite, c'est-à-dire dans les gaz suffisamment éloignés de leurs points de condensation. Il est donc intéressant de chercher si les propriétés connues des gaz ne s'expliqueraient pas en supposant que l'action moléculaire y varie en raison inverse de la densité, ce qui est la manière la plus simple dont elle puisse vraisemblablement en dépendre. On verra dans le dernier paragraphe du Mémoire avec quelle facilité cette hypothèse conduit aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac sur la pression, de

M. Joule sur l'énergie interne des gaz, de M. Regnault sur la constance de leurs capacités calorifiques, de Delaroche et Bérard sur l'égalité des chaleurs spécifiques, rapportées à l'unité de volume, chez tous les gaz simples, etc.

4. La théorie de Daniel Bernoulli et de Krœnig, complétée par Clausius, non sans l'aide de plusieurs hypothèses accessoires, et dans laquelle les gaz sont considérés comme des amas de molécules disjointes, lancées dans tous les sens et se heurtant parfois les unes contre les autres, n'est donc pas la seule qui permette de rendre compte des propriétés connues de ces corps. J'espère que la théorie nouvelle paraîtra étayée sur des suppositions en moindre nombre et plus vraisemblables. D'ailleurs, dans celle de Bernoulli, l'hypothèse fondamentale, consistant à admettre que la distance moyenne des molécules les plus voisines est très-grande, chez les gaz, en comparaison du rayon d'activité des actions moléculaires, me paraît sujette à une grave difficulté. Dans l'acide carbonique, en effet (et l'on pourrait en dire autant de tous les gaz liquéfiables), la densité à l'état gazeux n'est que de 400 à 500 fois plus faible qu'à l'état liquide ou à l'état solide; d'où il suit que l'écartement des molécules n'y est que de 7 à 8 fois plus grand. Or il est bien difficile de ne pas admettre, spécialement dans l'explication des phénomènes capillaires, que les actions émanées d'une molécule d'un corps liquide ou solide s'étendent avec une intensité sensible à des distances pour le moins égales à 7 ou 8 fois celle des molécules contiguës. Donc, même à l'état gazeux, chaque molécule d'acide carbonique se trouve très-probablement dans la sphère d'action de ses voisines, et les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, qui s'y appliquent avec une certaine approximation, ne doivent pas être dues aux causes assignées par la théorie de Daniel Bernoulli.

D'ailleurs, l'observation des bulles d'air énergiquement retenues contre les parois d'un vase paraît prouver, ou bien que les actions émanées d'un point de ces parois s'exercent, à travers des distances sensibles, sur un grand nombre de molécules gazeuses, et alors on n'a aucun droit de supposer incomparablement plus petit le rayon d'activité des actions moléculaires du gaz lui-même, ou bien, ce qui est la seule hypothèse vraisemblable, que le rayon d'activité des actions molécu-

laires n'a partout qu'une longueur imperceptible, et que les particules gazeuses restées adhérentes au vase y ont été retenues par leurs propres actions, à l'exception d'une couche extrêmement mince sur laquelle s'exerce directement l'attraction de la paroi.

§ I.

POINTS MATÉRIELS, VITESSES ET ACCÉLÉRATIONS.

5. Je considérerai un système fini de corps, assez éloigné de tout autre système pour qu'on puisse l'en supposer indépendant, et je concevrai qu'on l'ait divisé en éléments matériels assez petits pour que chacun d'eux ne subisse jamais de décomposition dans aucun phénomène connu. J'assimilerai ces éléments, ou *atomes*, à des points matériels : ce qui revient à supposer leurs dimensions très-petites par rapport aux distances auxquelles ils paraissent agir les uns sur les autres.

Soient : $M_1, M_2, \ldots, M_p, \ldots, M_n$ ces points; $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_p, y_p, z_p), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ leurs coordonnées à l'époque t par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes des x, y, z; $r_{p,q}$ leurs distances mutuelles, définissant leurs positions relatives, et dont la formule générale est

$$(1) \qquad r_{p,q} = +\sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2};$$

enfin $\alpha_{p,q}, \beta_{p,q}, \gamma_{p,q}$ les angles que cette droite $r_{p,q}$, parcourue en allant de M_p à M_q, fait avec les axes des x, y, z, et dont les cosinus sont

$$(2) \qquad \cos\alpha_{p,q} = \frac{x_q - x_p}{r_{p,q}}, \quad \cos\beta_{p,q} = \frac{y_q - y_p}{r_{p,q}}, \quad \cos\gamma_{p,q} = \frac{z_q - z_p}{r_{p,q}}.$$

Le mouvement du point M à l'époque t sera caractérisé par les accroissements que recevront à cette époque, durant un instant dt, ses trois coordonnées x, y, z, ou bien, afin de ne pas introduire d'infiniment petits dans les calculs, par les rapports à dt de ces accroissements, c'est-à-dire par les trois dérivées $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Ces trois dérivées,

qui ne sont autre chose que les augmentations, par unité de temps, des coordonnées considérées, s'appellent les trois vitesses du point suivant les axes, et l'on appelle sa *vitesse* réelle une ligne égale au rapport à dt de l'élément correspondant ds de sa trajectoire, menée, à partir de la position actuelle du point, dans la direction de cet élément. Le mouvement actuel est complétement représenté, en grandeur et en direction, par cette ligne, dont l'expression est

$$(3) \qquad V \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dt} = +\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}}.$$

L'état de mouvement du point se modifiant en général d'un moment à l'autre, ces changements, pendant un instant dt, sont définis par les rapports à dt des accroissements que reçoivent, durant cet instant, les trois composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, de sa vitesse. Ces trois rapports s'appellent les accélérations du point suivant les axes, et l'on appelle son *accélération* totale la diagonale du parallélépipède rectangle construit sur trois arêtes égales à ces accélérations et respectivement parallèles aux axes. Cette diagonale multipliée par dt représente, en grandeur et en direction, le second côté, infiniment petit, d'un triangle, dont le premier côté est la vitesse du point à l'époque t et le troisième sa vitesse à l'époque $t + dt$. L'accélération totale est donc, comme la vitesse totale, indépendante du choix des axes.

6. Dans le système matériel considéré, assez éloigné de tout autre pour pouvoir en être supposé indépendant, les phénomènes s'enchaînent de manière que l'état actuel, sous le double rapport de la situation et du mouvement, détermine celui qui aura lieu au bout d'un instant dt, celui-ci le suivant, et ainsi de suite à l'infini. C'est ce que l'on exprime en disant que *les phénomènes sont régis par des lois*. Par conséquent, la nature d'un système détermine toute la série des états par lesquels il passe, pourvu que l'on connaisse celui dans lequel il se trouve à une époque donnée, et qui peut évidemment être quelconque, en ce sens que les coordonnées et les vitesses, suivant les axes, des divers points y sont arbitraires.

Il suit de là que les accélérations $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ doivent être, pour chaque point et à toute époque, des fonctions parfaitement déterminées de l'état du système à cette époque, c'est-à-dire des coordonnées et peut-être aussi des vitesses. Toutefois, je dis que ces fonctions ne doivent pas dépendre des vitesses. En effet, il est d'abord naturel d'admettre que l'une quelconque d'entre elles ne peut tout au plus contenir que la vitesse du point dont elle exprime une accélération; car, durant l'instant dt, les vitesses des autres points ne modifient pas sensiblement leurs positions, ni par suite leur manière d'être et d'agir, par rapport à celui que l'on considère. Mais elle ne dépendra pas non plus de la vitesse de ce dernier; car, si l'on suppose imprimée aux autres une vitesse égale et parallèle à celle-là, ce qui ne changera pas, comme nous venons de dire, l'accélération actuelle du point considéré, tous seront animés d'un mouvement commun de translation dans l'espace; or l'expérience apprend que, dans ce cas, leurs déplacements par rapport à un système d'axes coordonnés parallèles aux axes fixes, mais constamment animés de ce même mouvement de translation, seront les mêmes que ceux qui auraient lieu par rapport aux axes fixes, si tous les points étaient actuellement sans vitesse. Donc *les accélérations suivant les axes fixes à l'époque t*, évidemment égales à celles qui seraient produites dans ce dernier mouvement, *ne dépendent que des positions actuelles des points par rapport à ces axes, et les uns par rapport aux autres.*

§ II.

PRINCIPE DES FORCES VIVES ET AUTRES LOIS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE.

7. Quelle que soit la cause inconnue qui meut la matière, l'observation attentive des faits nous porte à regarder l'énergie ou l'activité déployée dans un mouvement comme proportionnelle : 1° à la vitesse avec laquelle il s'effectue; 2° à la grandeur totale du déplacement opéré; 3° enfin à un coefficient appelé *masse*, dépendant de la nature du point qui est mû, et constant pour chaque point en vertu du grand principe de la *conservation de la matière*. Par conséquent, lorsqu'un

point de masse m parcourt avec la vitesse V, durant un instant dt, un chemin $ds = \mathrm{V}dt$, l'activité déployée dans ce mouvement est proportionnelle à $m\mathrm{V}ds = m\mathrm{V}^2dt$, et peut être considérée comme ayant pour mesure $\frac{1}{2}m\mathrm{V}^2dt$, ou, rapportée à l'unité de temps, $\frac{1}{2}m\mathrm{V}^2$. En étendant le signe de sommation Σ à tous les points d'un système, l'activité totale qui y sera déployée à l'époque t, par unité de temps, vaudra d'après cela la quantité $\frac{1}{2}\Sigma m\mathrm{V}^2$, que l'on appelle *puissance vive* du système.

Or l'expérience conduit à admettre qu'un système indépendant de tout autre tient de sa nature le pouvoir de développer par unité de temps une certaine activité, qui ne varie qu'avec les rapports mutuels des points dont il est formé, c'est-à-dire qui est une fonction déterminée $-\Psi$ de leurs distances actuelles $r_{1,2}, r_{1,3}, \ldots, r_{p,q}, \ldots$. Comme, d'ailleurs, on peut concevoir que les diverses parties d'un système se trouvent disposées d'une manière quelconque, à une époque unique, prise par exemple pour origine des temps, et reçoivent au même instant des vitesses quelconques, c'est-à-dire une activité arbitraire, il faut joindre à la fonction $-\Psi$, pour avoir l'expression totale de cette activité à l'époque t, une constante arbitraire C dépendant de l'*état initial* du système. On pourra donc poser l'équation suivante, qui sert de fondement à toute la Mécanique :

$$(4) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m\mathrm{V}^2 = -\Psi(r_{1,2}, r_{1,3}, \ldots r_{p,q}, \ldots) + \mathrm{C}.$$

Elle est l'expression analytique de ce qu'on appelle le principe de la *conservation des forces vives*, principe d'après lequel la *force vive*, $\Sigma m\mathrm{V}^2$, d'un système indépendant de tout autre, est impérissable ou se retrouve la même chaque fois que les parties du système reprennent les mêmes positions relatives.

Les distances r ne sont pas toutes indépendantes, et l'on pourrait en éliminer un certain nombre de la fonction Ψ; mais cette fonction, sous sa forme la plus naturelle, celle que nous supposerons adoptée, doit les contenir toutes; car il est rationnel d'admettre que chaque distance joue un rôle dans la production des phénomènes, en tant qu'exprimant le rapport des deux points qu'elle relie.

8. Différentions (4) par rapport au temps, après y avoir remplacé V

par son expression (3), et en tenant compte des relations (1) et (2). Si nous observons que l'état où se trouve le système à l'époque t pourrait être choisi comme état initial, et que, par suite, quelles que soient les coordonnées actuelles des divers points, on peut se donner arbitrairement les composantes actuelles des vitesses, dont les accélérations ne dépendent pas, nous devrons égaler dans les deux membres les coefficients de dx_p, dy_p, dz_p, et l'équation (4) équivaudra au système des $3n$ relations

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} m_p \frac{d^2 x_p}{dt^2} &= \sum \frac{d\Psi}{dr_{p,q}} \cos\alpha_{p,q}, \\ m_p \frac{d^2 y_p}{dt^2} &= \sum \frac{d\Psi}{dr_{p,q}} \cos\beta_{p,q}, \\ m_p \frac{d^2 z_p}{dt^2} &= \sum \frac{d\Psi}{dr_{p,q}} \cos\gamma_{p,q}, \end{aligned}\right.$$

où m_p désigne la masse du point quelconque M_p, et où les signes de sommation Σ s'étendent à toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ de q, autres que p.

Menons, à partir du point M_p, une droite dont les projections sur les trois axes soient respectivement les premiers membres de ces relations, et d'autres droites dont l'une sera dirigée suivant la ligne qui joint M_p à chacun des autres points M_q, et aura pour valeur $\frac{d\Psi}{dr_{p,q}}$; de plus, appelons *forces* toutes ces droites; *force motrice* de M_p la première d'entre elles, action de M_q sur M_p celle des autres qui est dirigée suivant la ligne M_pM_q, et convenons aussi d'appeler *résultante* d'un système de droites données la droite qui a sa projection sur un axe quelconque égale à la somme des projections sur le même axe des droites données, et qui joint, par conséquent, les deux extrémités de la ligne polygonale dont les divers côtés sont égaux et parallèles aux mêmes droites. Les relations (5) reviendront à dire que *la force motrice d'un point quelconque du système est la résultante d'actions partielles, dont chacune, exercée sur ce point par l'un des autres, est dirigée suivant la droite qui joint ces deux points, égale et contraire à la réaction du premier sur le second, et a pour expression la dérivée, par rapport à leur distance, d'une même fonction* Ψ *des distances actuelles de tous les points du système.* Cette fonction a reçu le nom de

fonction des forces et aussi de *fonction potentielle* ou d'*énergie potentielle*, pour une raison que l'on verra plus loin. Lorsqu'elle sera connue, les équations (5) formeront un système de $3n$ équations différentielles, dont l'intégration déterminera l'état du système à toute époque, si les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses sont données pour tous les points.

9. On peut avoir à considérer spécialement, dans un système indépendant de tout autre, un certain nombre de points constituant un *système partiel;* on appelle alors *forces intérieures* les actions et réactions mutuelles de ces points, et *forces extérieures* celles qui sont exercées sur les mêmes points par les autres.

On sait que la loi d'après laquelle la réaction est égale et contraire à l'action permet d'établir six relations d'où les forces intérieures se trouvent éliminées, et qui suffisent pour résoudre le problème du mouvement d'un corps de forme et de grandeur invariables, soumis à des forces extérieures données : les trois premières, qui subsisteraient alors même que la réaction, toujours égale à l'action et parallèle de sens inverse, ne serait pas dirigée suivant la droite de jonction des deux points, sont l'expression analytique de ce qu'on appelle le principe des *quantités de mouvement* ou *du mouvement des centres de gravité;* les trois autres sont de même l'expression du principe dit des *moments* ou des *aires*. Je renverrai aux Traités de Mécanique rationnelle pour l'exposition de ces principes et aussi pour la manière dont on déduit des équations (5) la formule des forces vives appliquée à un système partiel, en y introduisant la notion du travail des forces, demi-force vive due à leur action et égale pour chacune d'elles, pendant un instant dt, au produit de l'élément de chemin que décrit son point d'application par la projection de la force considérée sur ce chemin.

§ III.

ATTRACTION NEWTONIENNE ET ACTIONS MOLÉCULAIRES.

10. Il est un cas particulier pour lequel des considérations assez plausibles permettent, sans invoquer le principe des forces vives, d'ar-

river aux équations (5), et même de déterminer en partie la forme de la fonction Ψ : c'est celui d'un système dont tous les points se trouvent situés à des distances perceptibles les uns des autres, c'est-à-dire au delà des très-petites distances où leurs actions réciproques sont énergiques et constituent la cohésion des solides, l'adhésion des liquides et la pression des gaz.

Considérons, en effet, un système pareil. Les positions de tous ses points M_1, M_2,..., M_n, relativement aux directions des axes coordonnés et les uns par rapport aux autres, seront évidemment déterminées si l'on connaît en grandeur les droites $r_{1,2}$, $r_{1,3}$,..., $r_{1,n}$, qui joignent le point M_1 à tous les autres, ainsi que les angles qu'elles forment avec les axes des coordonnées. Par suite, les trois accélérations, suivant les axes, de l'un quelconque des points, de M_1 par exemple, seront des fonctions de ces distances et de ces angles. Il est clair, d'ailleurs, que ces fonctions cesseront de dépendre d'une des distances, de $r_{1,p}$, si celle-ci devient infinie; car, à mesure que M_p s'éloignera de M_1, son influence, répartie en quelque sorte sur la surface d'une sphère de rayon $r_{1,p}$, s'exercera sur M_1 d'après une fonction qui dépendra de l'inverse de cette surface ou de la quantité proportionnelle $\frac{1}{r_{1,p}^2}$. D'ailleurs, si toutes les distances pareilles deviennent infinies, l'accélération du point M_1, étant indépendante de sa vitesse, sera nulle par raison de symétrie, car elle ne pourra pas être dirigée plutôt dans un sens que dans l'autre. Les quantités $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2z_1}{dt^2}$ sont donc des fonctions continues de $\frac{1}{r_{1,2}^2}$,..., $\frac{1}{r_{1,3}^2}$, $\frac{1}{r_{1,n}^2}$, s'annulant quand toutes ces variables s'annulent. Et comme il n'y a pas de raison de supposer les dérivées de ces fonctions nulles ou infinies pour des valeurs nulles des variables, on peut les développer par la série de Maclaurin, en se contentant même des termes du premier degré quand les variables ne sont pas trop grandes. Il résulte de la forme linéaire ainsi donnée aux formules que : *Lorsqu'un point est situé à des distances sensibles des autres points avec lesquels il se trouve en rapport, ses accélérations, suivant trois axes rectangulaires fixes, sont respectivement, à chaque époque, les sommes de celles qu'il aurait s'il était séparément en rapport avec chacun des autres points.* De plus, *ces accélérations par-*

tielles doivent être en raison inverse du carré de la distance correspondante. Observons d'ailleurs que, *dans chaque système de deux points, les accélérations totales,* indépendantes des vitesses, *seront dirigées,* par raison de symétrie, *suivant la droite qui joint les deux points,* et enfin que l'accélération de chacun d'eux sera, au moins en général, dirigée vers l'autre et non dans le sens opposé; car une action répulsive aux distances finies détruirait les systèmes en les dispersant dans l'espace, tandis que l'observation et la raison prouvent au contraire l'existence d'une action attractive dont l'effet est de les former et de les maintenir en rapprochant jusqu'à un certain point leurs éléments.

On sait comment Newton a été conduit : 1° par la considération des deux premières lois de Kepler et de celles de la chute des corps, combinée avec l'observation du mouvement de la Lune, à admettre en effet, entre deux points séparés par une distance finie, une attraction en raison inverse du carré de cette distance; 2° par la considération de la troisième loi de Kepler, et sans doute aussi de la constance du nombre g pour tous les corps terrestres, à supposer cette attraction simplement proportionnelle aux masses des deux points et par conséquent indépendante, soit de leur nature chimique, soit de la présence des points matériels qui pourraient se trouver très-voisins de l'un d'eux. Cette dernière proposition résulte d'ailleurs simplement du fait de l'invariabilité du poids des atomes dans tous leurs états chimiques possibles, fait qui prouve bien que les actions dont la résultante constitue le poids d'un atome, c'est-à-dire celles qui sont exercées sur cet atome par les points matériels assez éloignés, ne dépendent pas de la présence des points matériels voisins de l'atome considéré.

11. La dérivée de la fonction des forces Ψ par rapport à toute distance perceptible de deux points du système se réduit par conséquent à un facteur positif constant, multiplié par le produit des masses de ces deux points et divisé par le carré de leur distance; ce qui revient à dire que la fonction Ψ se compose de deux parties dont l'une est égale, à part ce même facteur constant changé de signe, à la somme des termes qu'on obtient en divisant, par chacune des distances perceptibles de deux points du système, le produit de leurs masses, et dont la seconde, de forme plus compliquée, ne contient que les dis-

tances imperceptibles des points du système. Il en résulte que l'action totale exercée sur un point se compose de même de deux groupes de forces indépendants l'un de l'autre. Le premier groupe comprend les actions exercées sur ce point, d'après les lois de Newton, par ceux qui en sont à des distances finies; à cause de leur très-grand nombre, ces forces ont une résultante sensible, malgré leur extrême petitesse, et, comme elles sont exercées de loin, cette résultante, rapportée à l'unité de la masse attirée, varie assez graduellement d'un point de l'espace aux points voisins pour qu'on puisse la supposer constante dans toute l'étendue d'un petit volume quelconque. Le second groupe comprend les actions beaucoup plus énergiques qui ne s'exercent qu'à des distances insensibles. Les forces que l'on appelle *pressions, tractions, forces instantanées,* etc., ne sont que leurs résultantes prises dans des conditions diverses. On les désigne habituellement sous le nom d'*actions moléculaires;* mais cette dénomination me paraît à la fois trop générale, puisque les attractions newtoniennes sont elles-mêmes, à la rigueur, des actions moléculaires, et trop restreinte, car elle paraît exclure ce que j'appellerai, au paragraphe V, les *actions atomiques,* qui en font cependant partie. Je pense que le meilleur nom qu'on pût leur donner serait celui d'*actions de contact;* car le contact *physique,* qui admet des degrés, et qu'il ne faut pas confondre avec le contact géométrique ou absolu, n'est pas autre chose qu'un rapprochement de deux corps assez grand pour mettre ces forces en jeu.

Les résultantes d'actions moléculaires les plus importantes à considérer, parce qu'elles peuvent être tenues en équilibre au moyen de poids connus et être par suite évaluées effectivement en kilogrammes, sont celles que l'on appelle *pressions* ou *tractions,* et que l'on obtient en composant ensemble toutes les actions exercées, à de très-petites distances et à travers une surface donnée, par les points matériels qui sont d'un côté de cette surface sur ceux qui sont de l'autre côté. De petits éléments égaux et voisins d'une même surface se trouvant, en général, dans des conditions physiques pareilles, les composantes, suivant trois axes fixes de coordonnées, de la pression qu'elles supportent, varient avec continuité de l'un à l'autre, et l'on peut rapporter ces composantes à l'unité de surface, c'est-à-dire supposer chacune d'elles, sur tout élément plan très-petit mené par un certain point et

dans une direction donnée, égale au produit de l'aire de l'élément plan par une quantité finie et déterminée, qui ne varie plus qu'avec l'orientation de l'élément et avec les coordonnées du point considéré. Cette quantité finie est une pression rapportée à l'unité de surface. On sait comment l'application des deux principes des quantités de mouvement et des moments à un tétraèdre très-petit, considéré d'abord par Cauchy et dont les faces sont, trois rectangulaires de direction fixe, la quatrième de direction variable, permet d'évaluer toutes les pressions, relatives aux éléments superficiels qui se croisent en un même point, au moyen de six d'entre elles qui restent indépendantes, et comment le principe des quantités de mouvement, appliqué aussi par lui à un parallélépipède rectangle très-petit, fournit ensuite, pour calculer les déplacements perceptibles des diverses particules de matière qui composent un corps, trois équations dans lesquelles les actions moléculaires ne sont représentées que par les dérivées premières de ces six pressions par rapport aux coordonnées.

§ IV.

ÉNERGIE ACTUELLE ET ÉNERGIE POTENTIELLE.

12. Il est permis de supposer implicitement ajoutée à la fonction Ψ une constante arbitraire telle, que la plus petite valeur de cette fonction qu'on puisse avoir à considérer soit égale à zéro. A cette condition, Ψ ne deviendra jamais négative dans l'équation (4), qui revient à

$$\frac{1}{2}\sum mV^2 + \Psi = C. \tag{6}$$

On voit que la demi-force vive atteint sa valeur la plus considérable pour $\Psi = 0$, et qu'elle est alors égale à la constante du second membre. Celle-ci mesure donc le plus grand déploiement d'activité dont le système soit capable : c'est pourquoi elle a reçu le nom d'*énergie totale* du système. Elle est à chaque instant la somme de la demi-force vive, appelée aussi *énergie actuelle*, et de la valeur correspondante de Ψ,

dite *énergie potentielle*. Le travail d'une force, accroissement qu'elle apporte à la demi-force vive de son point d'application, représente par suite la quantité d'énergie potentielle transformée par cette force en énergie actuelle.

D'après les considérations qui terminent le paragraphe précédent, l'énergie potentielle se compose de deux parties distinctes, dont la première peut être appelée *énergie potentielle des attractions newtoniennes* et ne dépend que des distances finies des points du système, tandis que la seconde contient seulement les distances imperceptibles des mêmes points et a pour différentielle, par rapport à l'une quelconque de ces distances, le travail total, changé de signe et pris durant un instant dt, des deux actions réciproques exercées à ses extrémités. Cette seconde partie, que je désignerai par Φ, est appelée *énergie potentielle interne*.

15. Il est évident que, si, de toutes les droites qui joignent deux à deux les points d'un système, on fait au hasard deux groupes dont l'un contienne incomparablement plus de ces droites que l'autre, la somme des différentielles partielles, par rapport à toutes les droites de ce dernier groupe, de l'énergie potentielle interne du système, sera négligeable devant la somme des différentielles partielles de cette énergie par rapport aux droites du premier, et pourra par conséquent n'être pas comptée dans la différentielle totale de la même énergie. De ce principe résultent deux conséquences importantes : 1° les travaux des forces réciproques appliquées aux extrémités de toutes les droites de longueur insensible qui traversent une surface quelconque ont une somme totale négligeable; et, par suite, le travail des actions exercées d'un côté de la surface est constamment égal et contraire à celui des forces appliquées au côté opposé; 2° si l'on divise un corps en parties perceptibles, mais d'ailleurs petites ou grandes, on pourra, durant chaque instant dt, négliger le travail total des actions exercées à travers les surfaces de séparation des diverses parties, et même celui des actions réciproques appliquées, dans chacune d'elles, à l'intérieur d'une couche superficielle d'épaisseur égale au rayon d'activité des actions moléculaires, et qui pourraient par conséquent dépendre en partie du milieu adjacent.

La différentielle de l'énergie potentielle interne d'un système est donc égale à la somme des différentielles des énergies potentielles internes que posséderaient ses diverses parties supposées isolées les unes des autres. Comme on peut d'ailleurs concevoir l'espace qu'occupe un corps divisé en éléments de volume égaux, dans lesquels la nature et l'état de la matière varient en général avec continuité d'un point aux points voisins, la différentielle de l'énergie potentielle interne, pendant un instant dt, et par suite cette énergie elle-même, pourront être rapportées, en chaque point de l'espace, à l'unité de volume. En d'autres termes, si Φ_1 désigne une fonction de x, y, z, dépendant en chaque point de la nature et de l'état de la matière qui s'y trouve, ϖ le volume entier du corps, $\int_\varpi$ une intégrale prise dans toute l'étendue de ce volume, on aura

$$\Phi = \int_\varpi \Phi_1 \, d\varpi.$$

L'observation des phénomènes capillaires a démontré que, parmi les éléments de volume qu'on peut concevoir dans un système matériel, ceux qui se trouvent très-voisins de la surface, libre ou non, d'un liquide ont une énergie potentielle interne beaucoup plus grande, du moins dans sa partie variable d'un moment à l'autre, que ceux de l'intérieur du liquide, et que l'on doit compter spécialement dans ce cas, et malgré l'extrême petitesse, presque insensible, de l'épaisseur totale des couches superficielles, la part d'énergie potentielle interne qu'elles possèdent. Il est évident qu'on peut la rapporter à l'unité d'aire superficielle; si l'on appelle σ la surface totale, $d\sigma$ un de ses éléments, Φ_2 une certaine fonction de l'état de la surface au point considéré, la portion d'énergie potentielle interne qu'il s'agit d'évaluer sera

$$\int_\sigma \Phi_2 \, d\sigma.$$

Enfin, quand tous les mouvements étudiés sont continus, ou agitent, sans les mêler jamais, les éléments de volume matériels et juxtaposés qui composent chaque corps du système, on peut considérer, aux divers instants successifs, ces mêmes volumes matériels dont la forme,

la grandeur et la position dans l'espace varient d'un moment à l'autre, et rapporter par suite l'énergie potentielle interne, non pas à l'unité de volume actuel, mais à l'unité de volume primitif. C'est ce qu'il convient en particulier de faire dans la théorie de l'élasticité des corps solides, et, plus généralement, toutes les fois que l'on étudie les déplacements des points d'un milieu en caractérisant chacun de ces points par ses coordonnées primitives d'équilibre, prises ainsi pour variables indépendantes. On peut voir à ce sujet les notes 3 et 4, placées à la fin de la *Théorie des ondes liquides périodiques* (au tome XX du *Recueil des Savants étrangers*).

14. L'énergie potentielle interne de la matière contenue dans un petit volume quelconque ne donne, par ses variations d'un moment à l'autre, que le travail total, changé de signe, des actions réciproques exercées dans son intérieur à de très-petites distances; mais comme les actions réciproques qui s'y trouvent exercées à des distances finies, c'est-à-dire les attractions newtoniennes mutuelles de ses atomes, ne peuvent jamais avoir, sur chaque point matériel du volume, qu'une résultante extrêmement petite et négligeable, on peut dire que les variations de l'énergie potentielle interne comprennent tout le travail, changé de signe, des actions intérieures de l'élément de volume. Par suite, *l'augmentation, pendant un instant dt, de la demi-force vive de la matière contenue dans un petit volume quelconque*, augmentation égale à la somme des travaux de toutes les forces appliquées à chacun des points matériels qui s'y trouvent compris, *a pour valeur le travail total des actions extérieures qui agissent sur cette matière, diminué de l'accroissement que reçoit, pendant le même instant, son énergie potentielle interne.*

§ V.

ÉNERGIE PHYSIQUE OU MOLÉCULAIRE, ET ÉNERGIE CHIMIQUE OU ATOMIQUE.

15. L'étude attentive des faits conduit à regarder les corps comme composés de particules distinctes, extrêmement petites, appelées *molécules*, séparées par des intervalles très-supérieurs à leurs dimensions,

et qui agissent les unes sur les autres, avec une intensité notable, à des distances imperceptibles, mais néanmoins assez grandes pour que l'on puisse assimiler les molécules, dans le calcul de ces actions, à de simples points matériels. J'admettrai, avec Navier et Poisson, que le rayon d'activité R des mêmes actions, qu'on peut appeler *actions physiques* ou *moléculaires*, contient un grand nombre de fois la distance des molécules les plus rapprochées, hypothèse qui permet d'évaluer, sans erreur appréciable, l'action totale exercée sur une seule molécule par ses voisines comme si celles-ci remplissaient l'espace environnant ou formaient une matière continue; ce qui nous fournira plus loin d'intéressants résultats et en particulier l'explication du phénomène de la fluidité.

Indépendamment des actions physiques ou intermoléculaires, il y en a d'autres très-puissantes, qui n'agissent qu'à des distances comparables aux dimensions d'une molécule, et qui s'exercent notamment entre les divers éléments matériels, ou atomes, composant chacune d'elles; on peut les appeler *actions chimiques* ou *atomiques*.

16. Si l'on isole par la pensée, dans un corps, une particule quelconque d'un petit volume apparent v et de masse M, il arrive en général que le centre de gravité de chacune des molécules qu'il contient possède, en outre de son mouvement perceptible, graduellement variable d'un point de l'espace aux points voisins et qui est sensiblement le même pour toute la particule considérée, un mouvement vibratoire spécial, dit *calorifique*, s'effectuant avec rapidité, bien que d'amplitude insensible. La phase de ce mouvement change extrêmement vite quand on passe d'un point aux points voisins, et j'admettrai qu'elle reçoit à chaque instant ou presque à chaque instant les valeurs les plus différentes dans l'étendue d'une sphère décrite, d'un centre quelconque, avec le rayon d'activité R des actions moléculaires. Cette supposition ne serait pas permise si les vibrations dont il s'agit ici se propageaient par ondes régulières comme celles qui constituent la lumière et la chaleur rayonnante; car alors la longueur d'onde, bien que petite, serait probablement très-supérieure à R. Mais ces vibrations, qui constituent la chaleur se propageant par conductibilité, ont justement pour caractère distinctif d'être trop rapidement variables de phase

d'un point à l'autre pour qu'on puisse leur appliquer les équations ordinaires et bien connues des mouvements continus des milieux. Si l'on pouvait, en effet, leur appliquer ces équations, la propagation des vibrations calorifiques dans un corps athermane ne différerait pas sensiblement de celle du son. Enfin les atomes d'une même molécule sont, en général, animés de mouvements vibratoires de sens opposés, indépendants de celui du centre de gravité de la molécule et qui tendent même à la décomposer.

D'après cela, on voit que les coordonnées d'un atome d'un corps, par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes des x, y, z, sont de la forme

$$(7) \qquad x + \Delta x + \Delta_1 x, \quad y + \Delta y + \Delta_1 y, \quad z + \Delta z + \Delta_1 z,$$

$\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$, $\Delta_1 z$ désignant la partie de ces coordonnées qui provient du mouvement propre de l'atome, Δx, Δy, Δz celle qui provient du mouvement propre du centre de gravité de la molécule, enfin x, y, z les trois coordonnées qu'aurait l'atome à l'époque considérée t, dans le cas où la matière ne serait animée que de son mouvement perceptible. Si l'on multiplie la masse de chaque atome : 1° par l'une des quantités correspondantes $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$, $\Delta_1 z$, ou par leurs dérivées premières en t, qui sont les composantes suivant les axes des vitesses vibratoires atomiques; 2° par l'une des quantités Δx, Δy, Δz, ou par leurs dérivées premières en t, qui sont de même les composantes suivant les axes des vitesses vibratoires moléculaires, la somme des premiers produits, étendue à tous les atomes d'une même molécule, sera évidemment nulle, et la somme des seconds le sera aussi, pourvu qu'on l'étende à tous les atomes composant un élément de volume du corps. Cela posé, on peut, après avoir différentié les expressions (7), par rapport au temps, les élever au carré, multiplier celui-ci par la demi-masse $\frac{1}{2}m$ de l'atome correspondant, et faire la somme des résultats pour toute la matière comprise à l'intérieur du volume v; on trouvera ainsi, à cause de termes dont la somme sera nulle d'après ce qu'on vient de dire, que *la demi-force vive totale de la particule considérée de matière est simplement la somme : 1° de la demi-force vive correspondant au mouvement perceptible; 2° de celle qui correspond aux*

seules vibrations moléculaires; 3° enfin de la demi-force vive que posséderait la particule si les vibrations atomiques seules subsistaient. Il convient d'appeler les deux dernières parties, que je représenterai respectivement par E_m et par E_a, *énergie actuelle moléculaire* et *énergie actuelle atomique*, et de donner aussi à leur somme le nom d'*énergie actuelle interne*, le mot interne signifiant que cette partie de l'énergie actuelle n'est pas directement observable, parce qu'elle provient de mouvements d'amplitude imperceptible.

17. Il est évident que si l'on divise par la pensée un corps en petites parties, se trouvant à peu près de grandeur et de nature pareilles, placées dans les mêmes circonstances et contenant chacune un nombre assez grand de molécules pour qu'il y en ait simultanément à toutes les phases de leurs vibrations calorifiques, les énergies actuelles internes de ces parties seront sensiblement égales et auront pour somme la demi-force vive calorifique du corps tout entier. On peut donc rapporter l'énergie actuelle interne, tout comme on l'a fait au paragraphe précédent pour l'énergie potentielle interne, à l'unité de volume, actuel ou primitif, s'il s'agit de la matière située à l'intérieur des corps, et à l'unité d'aire, s'il s'agit de leurs couches superficielles. Par suite, la somme des deux énergies internes, potentielle et actuelle, pourra l'être également; cette somme a reçu le nom d'*énergie interne totale*. Elle est plus importante à considérer que chacune des deux parties qui la composent; car, si l'on considère à part, dans la demi-force vive totale d'un corps, celle qui correspond au mouvement perceptible de ses molécules, et qui seule est directement mesurable, le théorème des forces vives, appliqué à un petit volume quelconque et démontré à la fin du paragraphe précédent, pourra s'énoncer en disant que *la somme des deux accroissements, pendant un instant dt, de la demi-force vive perceptible d'un petit volume quelconque de matière et de son énergie interne totale, est égale au travail total, durant le même temps, des actions extérieures qui lui sont appliquées.*

18. Mais occupons-nous de l'énergie potentielle interne du petit volume déjà considéré v, et cherchons : 1° à la décomposer, s'il est possible, en énergie moléculaire et en énergie atomique; 2° à évaluer

la partie de cette énergie qui dépend des mouvements vibratoires, moléculaires ou atomiques.

L'action exercée entre deux atomes d'une même molécule ne doit pas dépendre, d'une manière appréciable, des distances réciproques d'atomes appartenant à des molécules différentes; car ces distances, par rapport à celle des deux atomes considérés, sont extrêmement grandes et peuvent être supposées infinies, quelles que soient leurs vraies valeurs. Les atomes d'une même molécule doivent donc se comporter à fort peu près, les uns par rapport aux autres, comme dans le cas où aucune autre molécule n'existerait, et, si l'on considère les variations reçues pendant un instant dt par l'énergie potentielle interne de la particule considérée de matière, la partie de ces variations qui égale le travail, changé de signe, des actions exercées entre des atomes d'une même molécule, pourra se calculer sensiblement, pour chaque molécule, comme si elle était seule. Par suite, la partie de l'énergie potentielle interne qui correspond aux actions chimiques est simplement, à part une constante arbitraire dont on peut faire abstraction, la somme des valeurs qu'elle a dans chaque molécule en particulier, valeurs qui sont, pour chacune, une fonction des seules distances réciproques de ses atomes. Je supposerai l'état chimique du corps assez stable pour que les positions relatives moyennes des atomes qui composent une même molécule restent à peu près les mêmes durant tous les phénomènes étudiés, de manière que la partie variable de cette fonction puisse être réduite à ce qui provient du mouvement vibratoire atomique. En retranchant de l'énergie potentielle interne la partie déjà considérée, je veux dire celle dont les variations d'un instant à l'autre, changées de signe, donnent le travail total des actions intérieures de chaque molécule en particulier, et qui est une fonction exacte des distances de leurs atomes, le reste sera une seconde partie, bien distincte, de la même énergie, dont les variations correspondront de même au travail des actions exercées entre atomes appartenant à deux molécules différentes. Examinons l'action totale exercée sur un atome d'une molécule par tous ceux d'une autre molécule; dans l'évaluation de cette résultante, toute droite mesurant la distance de deux points situés sur des molécules différentes pourra être remplacée par la distance, à fort peu près égale, des centres de gravité

des deux molécules elles-mêmes, et, de plus, d'après l'hypothèse faite de la petitesse des déformations subies par chaque molécule en particulier, les distances réciproques des points matériels de l'une d'elles, en admettant que les actions dont il s'agit varient avec ces distances, devront pouvoir y être remplacées aussi, sans erreur sensible, par leurs valeurs moyennes à peu près invariables. L'action totale d'une molécule sur un atome d'une autre ne variera donc qu'avec les distances des centres de gravité respectifs des molécules considérées et de leurs voisines, et il en sera de même de l'action totale de la première molécule sur la seconde, c'est-à-dire de la somme de toutes les actions pareilles exercées par la première sur les divers atomes de la seconde. Ces actions ne dépendant donc plus des distances atomiques individuelles, leurs travaux, c'est-à-dire leurs produits par les projections, sur leurs directions, des déplacements des atomes correspondants, seront en moyenne indépendants du mouvement vibratoire atomique, qui se fait dans des sens opposés, soit successivement, pour un même atome, soit simultanément pour les divers atomes d'une même molécule. Par suite, le travail total des actions réciproques exercées entre deux molécules pourra être réduit à celui qu'effectueront leurs deux résultantes générales, égales et opposées, supposées appliquées aux deux centres de gravité respectifs de ces molécules, et variables seulement avec les distances de ces centres ou de ceux des molécules voisines; changé de signe, il aura pour expression, durant un instant dt, le produit de l'une de ces résultantes, dite *action réciproque des deux molécules,* par la différentielle dr de la distance r de leurs points d'application. La somme des produits pareils, pour tous les couples formés par les molécules du volume v, sera l'accroissement, pendant l'instant dt, de la seconde partie de l'énergie potentielle interne, c'est-à-dire d'une fonction des distances des diverses parties qui composent le volume considéré; ce sera donc une différentielle exacte, et la seconde partie de l'énergie potentielle interne ne pourra que se réduire à une certaine fonction ψ des distances des centres de gravité des diverses molécules.

On voit que l'énergie potentielle interne sera la somme : 1° d'un terme provenant du mouvement vibratoire atomique et dans l'expression duquel les distances des centres de gravité des molécules n'en-

treront pas; 2° d'une partie qui ne variera au contraire qu'avec ces distances et qu'on pourrait appeler énergie potentielle moléculaire.

19. Soient, à l'époque t : x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'';... les coordonnées des positions moyennes des centres de gravité de molécules ayant respectivement pour masses $m, m', m'', \ldots$; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$; $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$; $x''+\Delta x''$, $y''+\Delta y''$, $z''+\Delta z''$;... les coordonnées de leurs positions vraies; $r, r', \ldots$ les distances des positions moyennes (x, y, z), (x', y', z'), $(x'', y'', z''), \ldots$; $r+\Delta r$, $r'+\Delta r'$;... les distances vraies des molécules, distances données par les relations

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} (r+\Delta r)^2 &= (x'-x+\Delta x'-\Delta x)^2+(y'-y+\Delta y'-\Delta y)^2 \\ &\quad +(z'-z+\Delta z'-\Delta z)^2,\ (r'+\Delta r')^2 = \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les quantités telles que Δr sont petites en comparaison des distances r des positions moyennes, et l'énergie potentielle moléculaire peut se développer, ainsi qu'il suit, par la série de Taylor limitée aux termes du second degré :

$$\begin{aligned} \psi(r+\Delta r, r'+\Delta r', \ldots) &= \psi(r, r', \ldots) \\ &\quad + \sum \frac{d\psi}{dr}\Delta r + \frac{1}{2}\sum \frac{d^2\psi}{dr^2}\Delta r^2 + \sum \frac{d^2\psi}{dr\,dr'}\Delta r\,\Delta r'; \end{aligned}$$

les deux premiers signes de sommation Σ s'étendent à toutes les distances $r+\Delta r$, et le dernier à toutes les combinaisons deux à deux de ces distances. Or la valeur moyenne de Δr ne diffère de zéro que par des quantités du second ordre de petitesse; d'où il résulte que le produit $\Delta r\,\Delta r'$, aussi souvent négatif que positif, est en moyenne d'un ordre de petitesse supérieur au second. On peut donc supprimer les termes qui en sont affectés et poser simplement

$$(9)\quad \psi(r+\Delta r, r'+\Delta r', \ldots) = \psi(r, r', \ldots) + \sum\left(\frac{d\psi}{dr}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dr^2}\Delta r^2\right).$$

La dérivée de l'énergie potentielle moléculaire par rapport à la distance de deux molécules m et m' n'est autre chose que l'action réciproque de ces deux molécules, action que je désignerai, aux para-

graphes VIII et IX, par $mm'\varphi(r+\Delta r, r'+\Delta r', \ldots)$. On a donc

$$\frac{d\psi}{dr} = mm'\varphi(r, r', \ldots), \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} = mm'\frac{d\varphi}{dr};$$

ce qui permet d'écrire identiquement, au lieu de la relation (9),

$$(10)\quad \psi(r+\Delta r, r'+\Delta r', \ldots) = \psi(r, r', \ldots) + \frac{1}{2}\sum\left[m\Sigma m'\left(\varphi\Delta r + \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dr}\Delta r^2\right)\right],$$

le signe Σ qui se trouve entre crochets, au second membre, s'étendant à toutes les molécules m' qui en entourent une même m, et le signe de sommation qui se trouve en dehors des parenthèses s'étendant ensuite aux sommes pareilles relatives à toutes les molécules m de la particule de matière considérée.

20. Occupons-nous d'abord de la première somme Σ, de celle qui est relative à toutes les molécules situées autour d'une même m, et cherchons sa valeur, ou plutôt la moyenne des valeurs qu'elle acquiert autour d'un grand nombre de molécules telles que m. Il est évident que la partie de cette somme qui est affectée linéairement des Δr doit être proportionnelle à la valeur moyenne de Δr, et que la partie de la même somme qui est affectée des Δr^2 doit être également proportionnelle à la valeur moyenne de $(\Delta r)^2$. Ces valeurs moyennes sont faciles à déduire des relations (8). La première de celles-ci donne, en effet, si l'on extrait la racine carrée des deux membres, qu'on développe celle du second, par la formule du binôme, jusqu'aux termes du deuxième ordre de petitesse inclusivement, et que l'on fasse ensuite abstraction des termes du résultat qui sont affectés linéairement de $\Delta x'$, Δx, $\Delta y'$, ..., Δz, ou du produit de deux Δ différents et dont la valeur moyenne est nulle,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta r = \text{en moyenne}\ & \frac{\Delta x'^2 + \Delta x^2 + \Delta y'^2 + \Delta y^2 + \Delta z'^2 + \Delta z^2}{2r} \\ & - \frac{(x'-x)^2(\Delta x'^2 + \Delta x^2) + (y'-y)^2(\Delta y'^2 + \Delta y^2) + (z'-z)^2(\Delta z'^2 + \Delta z^2)}{2r^3}. \end{aligned}\right.$$

Or, toutes choses égales d'ailleurs, les carrés des déplacements moléculaires vibratoires suivant les trois axes, $\Delta x'$, Δx, ..., Δz, sont

proportionnels aux carrés des amplitudes de ces déplacements, lesquels sont eux-mêmes, dans tous les mouvements vibratoires et toutes choses égales d'ailleurs, en raison directe du carré moyen des vitesses, c'est-à-dire du rapport de la demi-force vive totale E_m dépendant des mouvements considérés à la masse vibrante M. La formule (11) montre donc que la partie de la somme Σ étudiée, qui est affectée linéairement des Δr, est proportionnelle au rapport $\frac{E_m}{M}$.

Il en est de même de l'autre partie comprenant les termes affectés des $(\Delta r)^2$. Si l'on développe, en effet, toutes les parenthèses de la première formule (8), et que l'on substitue à chaque terme sa valeur moyenne, on trouve pour valeur moyenne de $(\Delta r)^2$ une expression linéaire par rapport aux carrés des $\Delta x'$, Δx, $\Delta y'$, ..., Δz, et variable, par suite, proportionnellement aux carrés des vitesses vibratoires ou à $\frac{E_m}{M}$. La somme Σ considérée est donc tout entière en raison directe de ce rapport.

La même somme varie encore avec la forme de la fonction φ. Nous supposerons que, pour toutes les particules matérielles qu'on se propose d'étudier, φ et sa dérivée en r soient les produits respectifs de deux mêmes fonctions des distances r, r', ..., par une quantité ε, seule variable d'une particule à l'autre, mais constante dans toute l'étendue de chaque particule : les sommes Σ considérées ne différeront évidemment les unes des autres, sous le rapport de la fonction φ, que par le facteur ε, auquel elles seront encore proportionnelles.

Observons enfin que, vu la grandeur supposée du rayon R d'activité des actions moléculaires par rapport à la distance des molécules les plus voisines, le calcul de la même somme Σ peut se faire comme si la matière était continue, et qu'il est permis de substituer, par suite, à la masse m' celle d'un petit élément de volume matériel voisin de la molécule m, et dont j'appellerai $d\varpi$ la valeur quand on suppose tous les points qui le composent placés dans leurs situations moyennes : cette masse sera $\rho\, d\varpi$ si ρ désigne la densité de la matière, et, les facteurs $d\varpi$ étant encore exactement pareils pour toutes les sommes Σ dont il s'agit, ces sommes seront proportionnelles à la densité ρ de la particule.

En résumé, désignons par $2f$ un coefficient qui aura la même valeur pour toutes les particules étudiées, et la somme Σ entre parenthèses du second membre de (10) vaudra moyennement $2f\rho\varepsilon\frac{E_m}{M}$. L'autre somme Σ, celle qui est en dehors des parenthèses, sera, par suite,

$$2f\rho\varepsilon\frac{E_m}{M}\Sigma m = 2f\rho\varepsilon E_m.$$

21. Il reste à évaluer la portion de l'énergie potentielle du corps qui provient des vibrations atomiques, et qui est, pour chaque molécule, la partie variable d'une fonction des distances de ses atomes. Or les mouvements vibratoires, en général, donnent lieu, suivant chaque axe coordonné, non-seulement à des oscillations continuelles des points étudiés autour de leurs situations moyennes, mais encore à de petits changements de ces situations moyennes, changements qui sont du second ordre de petitesse ou proportionnels au carré des amplitudes, et qui proviennent de ce que les déplacements positifs et les déplacements négatifs, par rapport aux positions primitives d'équilibre, ne se neutralisent que dans leurs termes du premier ordre. La fonction qui exprime l'énergie potentielle de chaque molécule pourra être développée par la série de Taylor, comme l'a été la fonction ψ, suivant les puissances des petites portions $\delta r + \Delta_1 r$, $\delta r' + \Delta_1 r', \ldots$, des distances mutuelles de ses atomes, qui proviennent du mouvement atomique et qui correspondent, savoir : δr, $\delta r', \ldots$ aux déplacements des situations moyennes des atomes; $\Delta_1 r$, $\Delta_1 r', \ldots$ au mouvement qui se fait autour de ces situations moyennes; ce qui donnera évidemment un terme proportionnel, en moyenne, au carré des amplitudes, ou au carré des vitesses correspondant à ce mouvement, c'est-à-dire à $\frac{E_a}{M}$. La masse totale M des molécules étant en raison directe de leur nombre, la partie cherchée de l'énergie potentielle sera égale au produit de l'énergie actuelle atomique E_a par un coefficient f' dépendant de la constitution des molécules.

22. L'énergie potentielle interne $\mathcal{E}$ de la particule sera donc en tout

$$\mathcal{E} = \psi(r, r', r'', \ldots) + f\rho\varepsilon E_m + f' E_a, \tag{12}$$

et l'*énergie interne totale* U, somme des deux énergies internes, potentielle et actuelle, vaudra

$$(13) \qquad U = \psi(r, r', r'', \ldots) + (1 + f\rho\varepsilon)E_m + (1 + f')E_a.$$

Il faut remarquer que r, r', r'',... désignent, dans ces formules, les distances mutuelles des centres de gravité des diverses molécules dans leurs situations relatives moyennes.

§ VI.

ÉTHER, LUMIÈRE ET CHALEUR, TEMPÉRATURE.

25. Les phénomènes lumineux et calorifiques n'ont pu être expliqués qu'en supposant répandu dans tout l'espace intra-stellaire un corps, l'*éther*, d'une densité assez petite par rapport à celle des autres corps, dits *pondérables*, pour n'exercer sur ceux-ci aucune action statique perceptible et ne pas même opposer de résistance appréciable à leurs mouvements, mais néanmoins capable de propager, avec une énorme rapidité, des ondes, à vibrations transversales, d'une amplitude extrêmement faible, dont la demi-force vive constitue justement la chaleur rayonnante et la lumière. Le carré de la vitesse de propagation de ces ondes dans le vide, étant égal au coefficient d'élasticité de l'éther divisé par sa densité, peut être très-grand, malgré la petitesse probable de l'élasticité de l'éther, pourvu que sa densité soit encore incomparablement plus petite. Ce milieu, qui pénètre d'ailleurs à l'intérieur de tous les autres corps en y conservant, à fort peu près, la même élasticité et la même densité que dans le vide interplanétaire (*), doit donc être considéré comme un solide pour de très-petits déplacements imprimés à ses molécules, et comme un fluide extrême-

(*) On peut voir les raisons qui prouvent que l'élasticité et la densité de l'éther sont les mêmes dans les corps que dans le vide, au paragraphe VIII d'un Mémoire intitulé *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (*Journal de* M. Liouville, t. XIII, 1868), ainsi qu'aux nos 10, 11, 22, 30, 33 d'une étude *Sur les diverses manières de présenter la Théorie des ondes lumineuses*, par M. de Saint-Venant (*Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXV, 1872) et à l'Addition ci-après (no VII).

ment facile à diviser pour des mouvements d'une amplitude plus grande; ce qui s'explique en admettant que sa résistance élastique aux déformations qu'on lui fait subir cesse d'être proportionnelle aux écarts moléculaires bien avant que ceux-ci deviennent perceptibles, et reste toujours très-petite en valeur absolue.

L'observation des phénomènes lumineux dans les corps en mouvement tend à prouver que l'éther, malgré sa faible masse relative, n'est pas retenu ni même mû sensiblement par les molécules pondérables qui le traversent, mais se comporte plutôt, à l'égard de ces corps, comme un liquide en repos à travers lequel passeraient des filets à mailles très-larges. Cette circonstance est évidemment inexplicable si l'on n'admet pas : 1° que la distance des molécules pondérables voisines est très-grande par rapport à leurs dimensions; 2° que le rayon d'activité des actions moléculaires de l'éther et celui des actions réciproques de l'éther et de la matière pondérable sont tout au plus comparables aux dimensions d'une molécule pondérable et ne s'étendent, par suite, tout autour de l'une quelconque de celles-ci qu'à une fraction négligeable de l'espace intermoléculaire environnant; 3° et, par suite, que l'éther n'est un milieu élastique possible qu'à la condition d'être incomparablement plus divisé ou plus ténu que les autres corps, de manière à avoir un nombre en quelque sorte infini de molécules dans un espace qui en contient seulement quelques-unes de matière pondérable.

Toutes ces propriétés de l'éther s'expliquent, si l'on admet que ce milieu se trouve, non pas condensé en molécules, comme la matière pondérable, mais à l'état d'atomes uniformément répandus dans l'espace, de manière à n'être soumis qu'aux actions atomiques, incomparablement plus énergiques que les autres, toutes choses égales d'ailleurs, mais dans le calcul desquelles on peut ne compter, comme notablement influentes, que celles qui s'exercent à des distances au plus comparables aux dimensions d'une molécule pondérable.

24. Tous les corps flottant ainsi dans l'éther, leurs vibrations moléculaires s'y propagent sous forme d'ondes qui constituent, suivant la durée plus ou moins courte des vibrations, les lumières des différentes couleurs et des chaleurs rayonnantes diversement réfrangibles.

Quand de telles ondes atteignent une région de l'éther dans laquelle se trouvent disséminées les molécules d'un corps, ces molécules prennent une certaine fraction finie de la quantité de mouvement reçue par l'éther qui les environne, et, malgré leur densité relativement énorme, elles se mettent à décrire des oscillations, extrêmement petites, il est vrai, par rapport à celles de l'éther. Or il peut se présenter deux cas principaux :

1° L'état vibratoire ainsi imprimé aux molécules pondérables peut n'être concordant avec aucun de ceux que les actions réciproques développées entre celles-ci tendraient à produire ou du moins à maintenir; alors ces molécules n'acquièrent pas des déplacements suffisants pour que leurs actions réciproques entrent en jeu avec une intensité comparable à celle des autres forces développées par le mouvement, ainsi que c'est démontré (en note) au paragraphe I de la *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* citée plus haut (ou au n° II de l'Addition ci-après); chaque molécule pondérable, soumise à la seule action de l'éther qui l'environne, finit par osciller à l'unisson de cet éther, et les ondes se propagent sans perte sensible d'énergie à travers le corps, qui est ainsi *transparent* ou *diathermane*. On peut voir, aux Mémoires précédemment cités, comment ces hypothèses, tellement naturelles qu'elles sont en quelque sorte inévitables, suffisent pour rendre compte, dans leurs plus petits détails, de tous les phénomènes lumineux observés et calculés jusqu'à ce jour.

2° L'état vibratoire communiqué par l'éther aux molécules pondérables peut être, au contraire, à peu près concordant avec l'un de ceux que leurs actions réciproques tendent à produire ou du moins à maintenir : les impulsions, très-faibles, mais incessantes, de l'éther viennent alors en moyenne s'ajouter à ces actions, suffisantes à elles seules pour continuer le mouvement oscillatoire des molécules une fois commencé, et ce mouvement s'accroît graduellement jusqu'à devenir comparable, pour l'amplitude et la vitesse, à celui de l'éther : il lui deviendrait même tout à fait égal s'il y avait parfaitement accord ou proportionnalité, à tous les instants, entre les impulsions de l'éther et les forces élastiques de la matière pondérable; car l'effet accélérateur de ces impulsions ne s'annulerait qu'avec les différences de vitesse des deux espèces de matière, différences auxquelles elles sont dues.

L'éther ne conserve donc bientôt plus qu'une demi-force vive extrêmement petite par rapport à celle que possède la matière pondérable, dont la densité est comme infinie par rapport à la sienne, et c'est cette dernière quantité d'énergie actuelle interne, acquise insensiblement par le corps et conservée au moyen de ses actions élastiques qu'elle met en jeu, qui est appelée sa *chaleur sensible;* elle peut évidemment se propager à travers un élément plan quelconque tracé dans le corps, par l'intermédiaire de l'éther, mais surtout directement, par le moyen des actions élastiques qui l'ont emmagasinée. Quoi qu'il en soit, le corps est *opaque* ou *athermane;* car il absorbe l'énergie des ondes qui y pénètrent, sauf à la transmettre ensuite de la même manière qu'il l'a reçue, c'est-à-dire peu à peu et à travers ses surfaces *libres,* à l'éther environnant, et, par *conductibilité,* aux points de son intérieur, ou à d'autres corps athermanes, non encore *chauds.*

Il faut observer que l'action de l'éther en mouvement sur une molécule doit souvent s'exercer inégalement sur les divers atomes qui la composent, de manière à leur communiquer des vibrations propres; ces vibrations s'exagéreraient et pourraient même amener la désagrégation de la molécule, si elles étaient en concordance avec celles que ses forces atomiques ou chimiques tendent à produire. Ainsi s'explique la décomposition, par la lumière ou par la chaleur, des molécules de certains corps, chimiquement simples ou composés, et aussi de certains mélanges, décomposition qui permet souvent à d'autres forces chimiques d'entrer en jeu et de reconstituer de nouvelles molécules plus stables, eu égard du moins aux circonstances qui président à leur formation.

25. Dans tous les cas, les actions exercées par l'éther, soit sur lui-même, soit sur la matière pondérable, restent extrêmement faibles en valeur absolue, et disparaissent en comparaison des actions réciproques développées au sein de la matière pondérable elle-même, dès que les déplacements de celle-ci deviennent comparables à ceux de l'éther. Si l'on peut, en effet, négliger ces dernières quand on étudie la propagation de la lumière et de la chaleur rayonnante, cela tient uniquement à ce que les molécules pondérables y restent en quelque sorte immobiles, tout en prenant, à cause de leur énorme masse rela-

tive, une fraction notable des quantités de mouvement produites. Mais, dans les phénomènes calorifiques proprement dits, c'est le contraire qui arrive, et toutes les actions exercées par l'éther ou sur l'éther y sont très-faibles par rapport aux actions réciproques de la matière pondérable. A plus forte raison, la faible densité de ce milieu l'empêche-t-il d'exercer, par sa présence, une influence appréciable sur la valeur des mêmes actions. Par suite, abstraction faite tout au plus d'une constante arbitraire, l'énergie potentielle interne de la matière comprise sous un volume déterminé conserve à fort peu près, en tenant compte de l'existence de l'éther, la même valeur qu'en n'en tenant pas compte; et, comme il en est de même, d'après ce qui vient d'être dit, de l'énergie actuelle interne, il n'y a rien à changer aux formules de l'énergie démontrées dans les précédents paragraphes.

Le rôle de l'éther se borne à établir, entre divers corps en présence, et sous forme d'ondes lumineuses ou calorifiques, des échanges continuels d'énergie destinés à les mettre entre eux dans une sorte d'équilibre dynamique; ce rôle lui est facilité autant que possible par l'énorme vitesse avec laquelle s'effectue le transport des quantités d'énergie échangées; mais, néanmoins, la faible masse de l'éther ne lui permet d'en recevoir que très-peu à la fois, ce qui explique pourquoi l'échauffement et le refroidissement d'un corps se font bien plus vite par conductibilité que par rayonnement.

26. On peut appeler *température absolue* d'un petit volume d'éther la demi-force vive qu'il possède sous l'unité de masse, ou une quantité proportionnelle à cette demi-force vive. Un corps est dit à une certaine température absolue τ, lorsque ses vibrations calorifiques n'augmentent ni ne diminuent si l'on vient à le placer dans de l'éther à la même température. Un pareil équilibre entre les molécules du corps pondérable et l'éther environnant exige que l'amplitude des vibrations des molécules et celle des vibrations de l'éther augmentent ou diminuent à la fois, toutes choses égales d'ailleurs; ces amplitudes étant très-petites, il est naturel de les supposer simplement proportionnelles l'une à l'autre, ainsi, par suite, que leurs carrés, pourvu toutefois que les autres conditions du phénomène restent les mêmes, c'est-à-dire pourvu que les molécules pondérables conservent entre

elles les mêmes rapports ou continuent à occuper, à fort peu près, leurs situations relatives moyennes. Cette condition restrictive pourrait être même supprimée, si l'action de deux molécules quelconques du corps, rapportée à l'unité de masse de ces molécules, était le quotient, par la densité ρ, d'une fonction $\chi(r+\Delta r)$ de leur seule distance; en effet, dans ce cas, qui se présentera au paragraphe IX, l'action exercée sur une molécule par celles qui forment un quelconque des éléments de volume environnants $d\varpi$ sera proportionnelle au produit $\chi(r+\Delta r)\,d\varpi$ de la masse $\rho\,d\varpi$ de cet élément de volume par l'expression $\frac{\chi(r+\Delta r)}{\rho}$, et ne dépendra pas par conséquent de la densité ρ ou du plus ou moins grand rapprochement des situations moyennes des molécules. En résumé, dans le cas d'un corps pareil, et dans celui d'un corps quelconque dont les molécules conservent à fort peu près, durant les phénomènes étudiés, leurs situations relatives moyennes, l'équilibre de température entre le corps et l'éther a lieu quand le carré de l'amplitude des vibrations moléculaires du corps est au carré de l'amplitude des vibrations de l'éther, dans un certain rapport constant, ou bien, à cause de la proportionnalité des amplitudes, en général, aux vitesses vibratoires, quand la valeur moyenne des demi-carrés des vitesses moléculaires, valeur exprimée par le rapport de l'énergie moléculaire E_m à la masse M du corps, est à la moyenne pareille relative à l'éther, laquelle égale, par définition, la température absolue T du corps, dans un rapport constant que j'appellerai e_m. C'est ce qu'exprime la relation

$$E_m = e_m \mathrm{MT}. \tag{14}$$

Il est pareillement naturel de supposer que les vibrations atomiques d'une molécule placée dans un éther à la température T n'augmentent ni ne diminuent quand le rapport de leur amplitude à celle des vibrations de l'éther est un certain nombre constant, dépendant de la nature et des situations relatives moyennes des atomes en présence. Par suite, il en sera de même du rapport existant entre les carrés de ces amplitudes, ou entre les valeurs moyennes des demi-carrés des vitesses correspondantes, valeurs qui sont $\frac{E_a}{\mathrm{M}}$ pour la matière pondérable, et T

pour l'éther. Soit e_a ce rapport, et l'énergie actuelle atomique sera

$$E_a = e_a \mathrm{MT}. \tag{15}$$

Les énergies actuelles, moléculaire et atomique, d'un corps sont donc des fonctions de sa température, et il en est par suite de même, d'après (12), de son énergie potentielle interne.

27. En général, plusieurs corps formant, avec l'éther qui les environne, un système indépendant de tout autre, et mis en rapport, soit par leurs actions et réactions mutuelles, soit par l'intermédiaire de l'éther interposé, sont en équilibre de température quand le mouvement calorifique de leurs molécules n'augmente ni ne diminue d'une vibration à l'autre, ou que le travail total, correspondant à ce mouvement, des forces appliquées à la molécule considérée pendant toute la durée d'une vibration, est égal à zéro. Or, bien que le détail des mouvements calorifiques et de leur mode de propagation d'une molécule à l'autre nous soit inconnu, il est naturel de penser qu'un corps réagit sur ses voisins, pour tendre à leur communiquer une partie de son énergie, non-seulement en raison de la demi-force vive qu'il possède, ou plutôt de son énergie actuelle moléculaire par unité de masse $\frac{E_m}{M}$, mais encore en raison d'autres éléments, comme, par exemple, du nombre et de la grandeur des actions mises en jeu à son intérieur, aux diverses périodes du mouvement. En effet, on conçoit que deux corps contigus, ayant, par unité de masse, des énergies actuelles moléculaires inégales puissent néanmoins ne pas produire, en somme, de travail l'un sur l'autre, et se maintiennent, par conséquent, en équilibre de température, si celui dont les oscillations ont le moins d'amplitude possède, par compensation, une élasticité plus puissante. Chaque température est ainsi caractérisée, dans un corps, par un certain pouvoir déterminé qu'il possède de résister à l'introduction dans son sein de l'énergie calorifique de ses voisins, pouvoir qui grandit avec son énergie actuelle moléculaire par unité de masse $\frac{E_m}{M}$ et avec son élasticité mise en jeu par le mouvement vibratoire. Ce pouvoir, étant évi-

demment pareil chez tous les corps qui sont en équilibre dynamique avec de l'éther à une température donnée τ, permet à ces corps d'être aussi en équilibre dynamique entre eux quand on les met en contact. Ainsi s'explique le principe d'après lequel *deux corps en équilibre de température avec un troisième le sont entre eux*, principe qui sert de fondement à la théorie analytique de la chaleur.

On peut observer enfin que les actions réciproques des molécules, pondérables ou éthérées, tendent à mouvoir d'autant plus chacune d'elles, que celle-ci a moins de masse. Il est donc assez naturel de supposer encore le pouvoir de résistance dont je viens de parler proportionnel, toutes choses égales d'ailleurs, à la masse d'une molécule du corps considéré : d'où il résultera que, si l'on amène divers corps d'une constitution chimique analogue à des états physiques pareils, leurs coefficients e_m et aussi, par suite, leurs caloriques spécifiques, seront en raison inverse du poids individuel de leurs molécules : cette loi comprend celle de Dulong et Petit sur les caloriques spécifiques des corps simples, et celle de Neumann sur les caloriques spécifiques des composés homologues.

28. Quant aux relations bien connues, déduites de la considération du tétraèdre de Cauchy, qui existent entre les pressions exercées sur les divers éléments plans menés par un même point, et aux équations de mouvement, exprimant l'équilibre entre les forces extérieures appliquées à un élément de volume rectangulaire et ses inerties, et qui contiennent les dérivées en x, y, z des pressions exercées sur trois de ses faces, elles conservent exactement la même forme, quand le corps est à une certaine température, que dans le cas où ses molécules ne sont animées d'aucun mouvement vibratoire d'amplitude imperceptible. En effet, six de ces formules, basées sur le principe des quantités de mouvement, ne conduisent pas à considérer d'autres coordonnées que celles du centre de gravité de l'élément de volume, tétraédrique ou rectangulaire, centre qui ne participe pas au mouvement calorifique; et les trois autres (exprimant ce qu'on appelle l'*égalité des composantes réciproques*), déduites du théorème des moments, ne sont pas non plus changées en y mettant pour les coordonnées de divers points matériels celles de leurs situations moyennes, parce que les erreurs

ainsi introduites sont complétement insignifiantes et d'ailleurs se neutralisent.

Mais il n'en est pas ainsi des pressions elles-mêmes, composantes totales, suivant une direction fixe, des actions moléculaires exercées par unité de surface à travers un élément plan situé dans un corps. Elles sont changées par les vibrations calorifiques, qui introduisent dans leurs expressions un terme sensiblement égal au produit de la température absolue par un coefficient dépendant de la nature et des situations relatives moyennes des molécules. En effet, chaque action moléculaire, étant une fonction des distances actuelles $r + \Delta r$ des molécules, peut être développée par la série de Taylor, suivant les puissances des parties variables Δr de ces distances, jusqu'aux termes de l'ordre de $(\Delta r)^2$ inclusivement, et les sommes des composantes de ces actions suivant une direction fixe contiendront, pareillement à ce qu'on a vu pour les formules (9) à (12), deux termes proportionnels, l'un à la valeur moyenne des Δr, l'autre à la valeur moyenne de leurs carrés, et par suite tous les deux à la valeur moyenne du carré des vitesses vibratoires, ou à la température τ. Dans l'expression des forces, dites élastiques, auxquelles se réduisent les pressions quand le corps est supposé peu écarté d'un état primitif d'équilibre, on pourra négliger l'influence des petites variations de la température sur les coefficients d'élasticité qui affectent les très-petites déformations produites, et se contenter d'ajouter, à la partie des pressions qui existait dans l'état primitif d'équilibre, un terme proportionnel à ces variations. Ce terme, pour une augmentation positive de la température, correspondra généralement à une vraie pression (et non à une tension ou traction), et aura pour effet, comme on sait, de dilater le corps; car, ainsi que l'a fait observer M. de Saint-Venant [*], les attractions développées, dans les vibrations calorifiques, par les écartements alternatifs des molécules, ne doivent pas être en général aussi grandes que les répulsions produites par leurs rapprochements, vu que les variations des actions moléculaires deviennent de plus en plus rapides ou considérables à mesure que décroissent les distances des molécules considérées.

---

[*] Société philomathique, 20 octobre 1855, au Journal l'*Institut*, 19 décembre, n° 1146, p. 440.

29. La température d'un corps, influant tout à la fois sur les distances relatives moyennes des molécules et sur l'état atomique de chacune d'elles, ne peut manquer de modifier tout ce qui dépend de ces éléments, comme, par exemple, les propriétés optiques, dans lesquelles interviennent la densité du corps et la constitution de chacune de ses molécules. En vertu du principe de la superposition des petits mouvements, des ondes lumineuses qui tombent sur un corps transparent déjà soumis à une certaine agitation calorifique doivent, à fort peu près, se propager à son intérieur comme si cette agitation n'existait pas, mais que les molécules conservassent les formes et les positions relatives moyennes qu'elles ont à la température des expériences.

§ VII.

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA THERMODYNAMIQUE.

30. L'état d'un corps dépend donc de sa température, et le problème de la détermination d'un pareil état n'est résoluble que si l'on peut établir une équation indéfinie et des conditions spéciales aux surfaces limites, permettant d'évaluer les variations éprouvées d'un instant à l'autre par la température de chaque élément de volume v du corps.

L'équation indéfinie cherchée s'obtient en exprimant, conformément au principe des forces vives, que l'accroissement, pendant un instant dt, de la somme de l'énergie actuelle totale de l'élément de volume et de son énergie potentielle interne, est égal au travail total des forces extérieures qui agissent, les unes sur ses atomes superficiels, les autres sur toute sa masse. Occupons-nous d'abord des premières de ces actions.

31. Les déplacements, suivant les trois axes coordonnés, des atomes superficiels se composent de deux parties, dont l'une correspond au mouvement perceptible de la portion adjacente de la surface, et l'autre aux vibrations calorifiques d'amplitude insensible : le travail des forces extérieures appliquées à ces atomes, respectivement égal au produit

de chaque force par la projection sur sa direction du déplacement total de son point d'application, se composera donc de deux parties, dont l'une, la première à considérer, sera la valeur qu'aurait ce travail si l'agitation calorifique existait seule, et dont l'autre serait la valeur du travail de la même force si, au contraire, chaque atome n'avait pas d'autre mouvement que le mouvement perceptible de l'élément adjacent de la surface. La première n'est autre que la quantité d'énergie communiquée à l'élément de volume en vertu des mouvements vibratoires imperceptibles, ou, comme on dit, la *chaleur* introduite du dehors : je la représenterai, selon l'usage, par dQ, mais en la supposant évaluée en kilogrammètres et non en calories.

Dans cette première partie, il faut tenir compte, non-seulement des actions réciproques de la matière pondérable qui sont exercées du dehors à travers la surface, mais encore, quand il y a de la chaleur rayonnante absorbée ou émise, de toutes les actions exercées, à travers la même surface, par les molécules d'éther extérieures au volume considéré, ou sur les molécules d'éther intérieures; en d'autres termes, l'influence très-petite du rayonnement ne doit pas être négligée devant celle de la conductibilité. La raison en est que la conductibilité ne se révèle dans sa vraie énergie qu'entre deux corps inégalement chauds mis en contact, et durant un instant très-court : habituellement elle s'exerce entre des particules contiguës dont les températures diffèrent extrêmement peu, et son effet total, à travers un élément plan, est comparable à celui du rayonnement, vu que les travaux des actions énergiques qu'elle représente sont, les uns positifs, les autres négatifs, et se neutralisent à fort peu près.

32. Quant à la seconde partie du travail des forces extérieures appliquées aux atomes superficiels du volume considéré, elle est égale au déplacement visible de chaque élément contigu de la surface, multiplié par la somme des projections, sur ce déplacement, de toutes les forces exercées à travers le même élément, c'est-à-dire par la projection pareille de la résultante d'actions moléculaires, ou *pression*, qui s'y trouve appliquée. Or les composantes, suivant chacun des axes coordonnés, des pressions exercées sur les diverses faces d'un élément de volume, ont une somme égale et contraire à celle des composantes

pareilles des autres forces, y compris les inerties, qui sont appliquées à toute sa masse, et, par conséquent, du même ordre de grandeur que le volume même de l'élément, bien que ces pressions soient individuellement comparables à sa surface, c'est-à-dire infiniment plus grandes. On peut donc diviser les pressions appliquées à l'élément de volume en deux parties : l'une finie par unité de surface, mais ayant, suivant chaque axe, une somme totale rigoureusement nulle; l'autre infiniment petite, et dont la projection totale sur un axe coordonné quelconque, jointe à celle des forces extérieures qui agissent, suivant le même axe, sur toute la masse de l'élément, est égale et contraire à son inertie correspondante. Dans le cas usuel d'un fluide ou, plus généralement, d'un corps pour lequel la partie finie des pressions se réduit à une pression normale et constante p, on sait que le travail de cette partie des pressions est égal au produit $-p\,dv$ de la pression, changée de signe, par l'augmentation dv du volume de l'élément durant l'instant dt. Dans le cas d'un corps quelconque, ce travail a une expression assez compliquée, que j'ai établie au n° 2 (formule c) de la troisième Note imprimée à la suite de la *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Savants étrangers*, t. XX), et qui, rapportée à l'unité de volume primitif de l'élément, contient : 1° les six composantes suivant les axes N, T (notations de Lamé) des pressions ou plutôt des *tractions* exercées sur les trois éléments plans, dits *principaux*, qui leur sont perpendiculaires; et, en outre, 2° les dérivées premières en x, y, z des déplacements u, v, w reçus par les points matériels de l'élément, dont x, y, z désignent les coordonnées primitives; 3° les différentielles, par rapport au temps, des mêmes dérivées. Je désignerai cette expression par $d\varpi$ [*].

---

[*] Elle se compose de neuf termes triples, dont les trois premiers, divisés par dt et par le volume primitif de l'élément, sont

$$\left(N_1\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+T_3\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+T_2\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}\right)\frac{d^2u}{dx\,dt}+\left(T_3\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+N_2\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+T_1\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}\right)\frac{d^2v}{dx\,dt}$$
$$+\left(T_2\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+T_1\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+N_3\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}\right)\frac{d^2w}{dx\,dt},$$

et dont les six autres se déduiraient de ceux-là par le simple changement de x en y et

33. Il reste à évaluer le travail de l'autre partie, très-petite, des pressions. On n'y commettra pas d'erreur sensible en remplaçant les déplacements, pendant l'instant dt, des éléments de la surface auxquels elles sont appliquées, par celui du centre de gravité de l'élément de volume, et la même substitution pourra être faite dans le calcul du travail des actions extérieures appliquées à la masse entière M de l'élément. Si donc x, y, z désignent les coordonnées du centre de gravité considéré, et toutes ces forces ayant respectivement pour sommes, suivant les axes des x, des y et des z, les inerties correspondantes, changées de signe, $\mathrm{M}\frac{d^2x}{dt^2}$, $\mathrm{M}\frac{d^2y}{dt^2}$, $\mathrm{M}\frac{d^2z}{dt^2}$, leur travail total vaudra

$$(16)\quad \mathrm{M}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}d\left[\mathrm{M}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\right],$$

c'est-à-dire précisément la différentielle de l'énergie actuelle correspondant au mouvement perceptible et fini de l'élément de volume.

34. C'est la somme de cette expression, du travail $d\tau$ des pressions égales et opposées appliquées à la surface de l'élément, et de la chaleur $d\mathrm{Q}$ introduite du dehors, qu'il faut égaler à l'accroissement de l'énergie actuelle totale de l'élément et de son énergie potentielle interne. On pourra décomposer l'énergie actuelle totale en celle qui correspond au mouvement perceptible de l'élément de volume, et en énergie actuelle interne; cela permettra : 1° de retrancher des deux membres de l'équation la différentielle de la première partie, c'est-

---

puis en z; θ y désigne la dilatation cubique, donnée par la relation

$$1+\theta=\left(1+\frac{du}{dx}\right)\left(1+\frac{dv}{dy}\right)\left(1+\frac{dw}{dz}\right)-\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}\left(1+\frac{du}{dx}\right)-\frac{dw}{dx}\frac{du}{dz}\left(1+\frac{dv}{dy}\right)$$
$$-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\left(1+\frac{dw}{dz}\right)+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy}.$$

On voit que, dans le cas où les forces tangentielles T sont nulles, et où, par suite, les forces normales N valent une même quantité $-p$, l'expression considérée se réduit à $-pd\theta=-pd(1+\theta)$ pour le volume $1+\theta$, primitivement égal à un, et, par suite, à $-pdv$ pour un petit volume v quelconque.

à-dire l'expression (16); 2° de réunir les deux énergies internes, potentielle et actuelle, dont la somme, appelée ordinairement *chaleur interne* de l'élément, a été représentée par U : il viendra ainsi l'*équation fondamentale de la Thermodynamique*

$$dQ + d\varpi = dU. \tag{17}$$

Dans cette formule, $d\varpi$ désigne le produit, par le volume primitif de l'élément et par dt, de l'expression à neuf termes triples de la note précédente (on aurait simplement

$$d\varpi = -p\,dv \tag{18}$$

s'il s'agissait d'un fluide ou, plus généralement, d'un corps dont chaque élément plan ne supporterait que des actions normales); U, énergie interne ou chaleur interne, est une fonction, supposée connue, soit, dans le cas particulier pour lequel $d\varpi = -p\,dv$, de la température et de la pression ou de la densité, soit, dans le cas plus général d'un corps élastique quelconque, de la température et des déformations subies par l'élément de volume à partir d'un état d'équilibre primitif (ces déformations sont réductibles, ainsi qu'on peut le voir au n° 5 de la note citée [*], à six distinctes, aisément exprimables en fonction des dérivées premières des déplacements u, v, w des diverses particules du corps par rapport à leurs coordonnées primitives d'équilibre); enfin la valeur, dQ, de la chaleur introduite dans l'élément durant l'instant dt, peut être obtenue, comme on le montre dans les Traités sur la *Théorie analytique de la chaleur*, pourvu que l'élément de volume soit athermane, c'est-à-dire tel que les flux de chaleur qui traversent ses faces ne varient qu'avec le mode de distribution des températures dans une étendue très-petite tout autour, circonstance en vertu de laquelle ces flux dépendent exclusivement de la température au point considéré, de ses trois dérivées premières en x, y, z, et aussi, généralement, des dérivées premières en x, y, z des déplacements u, v, w.

Grâce à ces diverses substitutions, l'équation (17), divisée par dt

[*] *Théorie des ondes liquides périodiques*, troisième Note finale.

et par le volume primitif de l'élément, ne contiendra plus que la température, sa dérivée première en t, ses dérivées premières et secondes en x, y, z, les dérivées premières et secondes en x, y, z des déplacements u, v, w, enfin, et linéairement, ces dernières dérivées premières différentiées par rapport à t. En la joignant aux trois équations de mouvement, données au § I de la *Théorie des ondes liquides périodiques* [*], et dans lesquelles les forces N, T devront être remplacées, comme dans la précédente (17), par leurs valeurs en fonction de la température et des dérivées premières de u, v, w par rapport à x, y, z, on aura toutes les équations indéfinies nécessaires pour déterminer, aux divers instants successifs, les déplacements u, v, w, et la température, de toutes les particules matérielles constituant le corps élastique étudié.

35. L'équation (17) se simplifie dans le cas d'un corps athermane, très-peu écarté d'un état d'équilibre stable, non soumis à de grandes pressions, et dont les divers points sont à des températures n'ayant entre elles que des différences modérées. On peut alors y négliger tous les termes où entrent les quantités fort petites u, v, w, et y supposer même indépendants de la température, assez peu variable par hypothèse, tous les coefficients qui affectent les dérivées partielles de celle-ci; ce qui réduit l'équation à la formule fondamentale, bien connue, de la théorie analytique de la chaleur.

---

[*] La première de ces équations est

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dN_1}{dx}\frac{d\theta}{d\frac{du}{dx}}+\frac{dN_1}{dy}\frac{d\theta}{d\frac{du}{dy}}+\frac{dN_1}{dz}\frac{d\theta}{d\frac{du}{dz}}\\
+&\frac{dT_3}{dx}\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dx}}+\frac{dT_3}{dy}\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dy}}+\frac{dT_3}{dz}\frac{d\theta}{d\frac{dv}{dz}}\\
+&\frac{dT_2}{dx}\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dx}}+\frac{dT_2}{dy}\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dy}}+\frac{dT_2}{dz}\frac{d\theta}{d\frac{dw}{dz}}
\end{aligned}\right\}+\rho X=\rho\frac{d^2u}{dt^2},$$

où ρ désigne la densité du milieu dans l'état primitif et X la composante, suivant les x, de l'action extérieure rapportée à l'unité de masse.

Lorsque le corps est notablement diathermane, dQ dépend d'autre chose que de son état dans une petite étendue, et l'on ne sait pas encore quelle expression il convient de donner à cette différentielle, du moins en général. Le problème du mouvement du corps est cependant déterminé quand un état permanent et connu des températures se trouve établi, à part des variations plus ou moins sensibles provenant du mouvement étudié lui-même. En effet, il arrive alors, ou bien que les vitesses $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ ne causent que des changements de température constamment négligeables, ou bien que ces vitesses ou plutôt leurs dérivées premières en x, y, z acquièrent des valeurs assez grandes pour que la chaleur produite en un point n'ait pas le temps de se propager en quantité notable et pour qu'on puisse poser, par conséquent, $dQ = 0$, ou réduire la formule (17) à $d\varpi = dU$. Le premier cas est le seul à considérer dans les questions d'équilibre, et l'on peut même s'y borner quand on traite des vibrations des solides élastiques, ainsi que de l'écoulement ou des oscillations des liquides, parce que les quantités de chaleur et les variations de température produites dans ces mouvements sont presque toujours négligeables. Le second cas se présente dans l'étude des vibrations des gaz ou des vapeurs, ainsi que dans celle de leur écoulement sous de fortes pressions.

36. La relation fondamentale (17) permet d'éliminer l'énergie interne de l'équation des forces vives appliquée à une masse quelconque, solide ou fluide. Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas ordinaire où les attractions newtoniennes exercées entre les diverses parties de la masse considérée sont insensibles. L'équation des forces vives revient alors à dire que la somme des accroissements, pendant un instant dt, de la demi-force vive perceptible de la masse entière et de son énergie interne, est égale au travail total des actions extérieures, appliquées, les unes à tous les points de cette masse, les autres à sa couche superficielle. Le travail de celles-ci se compose, comme on a vu (nos **31** et **32**), de celui de leurs résultantes ou *pressions* et de ce qu'on appelle la *quantité de chaleur* cédée au corps. L'accroissement, durant l'instant dt, de la demi-force vive perceptible de la masse entière, est donc égal au travail total des actions extérieures appliquées

à son intérieur et des pressions exercées sur sa surface, diminué de l'excès de l'accroissement de son énergie interne sur la quantité de chaleur qui s'y est introduite du dehors pendant le même instant. Or, si l'on ajoute membre à membre toutes les équations telles que $dU - dQ = d\varpi$, relatives aux divers éléments de volume dont se compose la masse entière, la somme des quantités dQ de chaleur, passées à travers toutes les surfaces de ces éléments, se réduira à la chaleur venue du dehors; car les deux flux calorifiques qui traversent dans les deux sens une même surface contiguë à deux éléments de volume sont à chaque instant égaux et contraires : le résultat de l'addition effectuée exprimera donc que l'excès de l'accroissement de l'énergie interne totale de la masse sur la chaleur qui s'y est introduite a pour valeur la somme des expressions $d\varpi$, étendue à tout le corps. Ainsi *l'accroissement, durant un instant dt, de la demi-force vive perceptible d'une masse quelconque, dont les divers points n'exercent les uns sur les autres, à des distances finies, que des actions négligeables, est égal au travail total des actions extérieures appliquées à son intérieur et des pressions exercées sur sa surface, diminué de la somme des expressions $d\varpi$ relatives à ses divers éléments de volume.*

L'équation des forces vives ainsi transformée ne contient, en outre des actions extérieures appliquées à toute la masse, que les déplacements perceptibles u, v, w de ses divers points, ou leurs dérivées, et les pressions exercées à son intérieur ou sur sa surface. Elle a précisément la forme qu'on lui aurait donnée immédiatement si l'on avait supposé le corps imperméable à la chaleur, hypothèse qui, revenant à faire $dQ = 0$ ou $dU = d\varpi$, aurait permis de substituer à la variation de l'énergie interne U de tout élément de volume l'expression $d\varpi$ correspondante. Cette hypothèse simplificatrice, dont je me suis servi dans la note 4 placée à la suite de la *Théorie des ondes liquides périodiques*, et qui consiste à supposer les diverses parties d'un corps imperméables à la chaleur, est donc permise dans les questions de Mécanique où il s'agit d'évaluer des changements de forces vives perceptibles, pourvu qu'on donne dans chaque cas, aux pressions produites en divers points, les valeurs qu'elles ont aux températures qui s'y trouvent effectivement réalisées.

§ VIII.

ACTION MOLÉCULAIRE DANS UN CORPS ISOTROPE; SOLIDITÉ ET FLUIDITÉ.

37. Bien que l'action de deux molécules doive dépendre en général, non-seulement de leur distance, mais encore des distances entre elles et aux deux premières de toutes les autres molécules voisines, on conçoit que l'influence de celles-ci puisse y être représentée, à cause de leur grand nombre, au moyen de certains éléments généraux définissant jusqu'à un certain point l'état du milieu, la densité par exemple, et sans que chacune d'elles paraisse individuellement dans l'expression de l'action moléculaire. C'est une expression de ce genre que nous allons chercher, en nous bornant au cas d'un milieu *isotrope*, c'est-à-dire tel, que les formules qui expriment ses propriétés soient les mêmes de quelque façon qu'on fasse tourner, autour de l'origine, le système des axes rectangulaires auxquels on le rapporte.

Pour cela, appelant x, y, z les coordonnées d'équilibre d'une molécule M, $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ les coordonnées pareilles d'une molécule voisine M′, r leur distance primitive, je supposerai que ces coordonnées reçoivent de petits accroissements, u, v, w pour la première, et, pour la seconde, u, v, w augmentés de leurs différentielles obtenues en y faisant croître x de δx, y de δy, z de δz. La distance r des deux molécules aura crû ainsi d'une petite quantité δr, laquelle est sensiblement, ainsi qu'on le voit dans tous les Traités sur l'élasticité, une fonction linéaire des six expressions

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{dv}{dy},\quad \frac{dw}{dz},\quad \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx};$$

comme il en sera de même de toutes les distances moléculaires, l'action réciproque des deux molécules M et M′, qui en dépend et qui peut être développée par la série de Taylor jusqu'aux premières puissances

des accroissements tels que δr, deviendra de la forme

$$(19)\quad \begin{cases} a + b_1 \dfrac{du}{dx} + b_2 \dfrac{dv}{dy} + b_3 \dfrac{dw}{dz} \\ \quad + c_1 \left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right) + c_2 \left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right) + c_3 \left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right); \end{cases}$$

les coefficients a, b_1, b_2,..., c_3 ne pourront plus varier qu'avec les circonstances qui déterminent, dans l'état primitif, la position de M′ par rapport à M et par rapport à l'orientation des axes, c'est-à-dire avec la longueur de la droite r et avec les cosinus des angles que cette droite fait avec les axes des coordonnées.

Cela posé, admettons que la ligne qui joint les deux points M et M′ soit prise pour axe des z, et faisons tourner le système des deux autres axes autour de cette ligne. Il est évident qu'à cause de l'isotropie supposée du milieu l'expression (19) devra rester constamment la même. Faisons d'abord la rotation égale à 180 degrés, transformation d'axes qui revient simplement à changer x en $-x$, y en $-y$, u en $-u$, v en $-v$: les cinquième et sixième termes de (19) changent ainsi de signe, à moins qu'ils ne soient nuls; ce qui oblige à poser $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Mais on peut opérer aussi une rotation de 90 degrés, en changeant x en y, y en $-x$, u en v, v en $-u$: cette transformation donne un signe contraire au dernier terme de (19) et change l'un dans l'autre le second et le troisième terme; on a donc $c_3 = 0$, $b_1 = b_2$. Si l'on observe que la somme $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ représente la dilatation cubique θ d'un élément de volume comprenant les deux molécules M et M′, c'est-à-dire le rapport de la diminution $-\delta\rho$ de la densité à sa valeur primitive ρ, et que, d'autre part, $\frac{dw}{dz}$ est la dilatation de la ligne r, ou le rapport $\frac{\delta r}{r}$, l'expression (19) prend donc la forme simple

$$(20)\qquad a - b_1 \frac{\delta\rho}{\rho} + (b_3 - b_1)\frac{\delta r}{r}.$$

Les deux premiers termes de celle-ci, où a, b_1 et b_3 ne dépendent plus que de r, peuvent être regardés comme la partie sensible du dé-

veloppement, suivant les puissances ascendantes de $\delta\rho$, d'une certaine fonction F de r et de $\rho + \delta\rho$. Cette fonction est d'ailleurs équivalente, sauf erreur négligeable du second ordre de petitesse et en désignant par $F'(r, \rho)$ la dérivée de F en r, à la différence

$$F(r + \delta r, \rho + \delta\rho) - F'(r, \rho)\,\delta r.$$

Réunissant enfin ce dernier terme, affecté de δr, à celui qui termine l'expression (20), et appelant F_1 une certaine fonction de r, il vient, pour l'action moléculaire φ, que l'on peut supposer rapportée à l'unité de masse des deux molécules, c'est-à-dire divisée par le produit mm' de leurs masses,

$$(21) \qquad \varphi = F(r + \delta r, \rho + \delta\rho) + F_1(r)\frac{\delta r}{r} \quad [*].$$

38. Ainsi, *dans un milieu isotrope peu écarté de son état primitif d'équilibre, l'action moléculaire se compose de deux forces : l'une, que j'appellerai de première espèce, ne varie qu'avec la distance actuelle des deux molécules considérées et la densité actuelle du milieu; la seconde, que j'appellerai de deuxième espèce, dépend de la distance primitive des deux molécules et du petit écartement qu'elles ont subi à l'époque actuelle.* La première agit très-peu dans les mouvements qui ont lieu sans changement de densité, si l'on admet que l'action moléculaire s'étende à un grand nombre de molécules; car, pendant toute la durée d'un pareil mouvement, chaque particule de matière se trouve sensiblement en rapport avec une même quantité d'autres particules placées de la même manière. On voit aussi qu'elle ne doit donner à fort peu près sur un élément plan quelconque, par raison de symétrie, qu'une pression normale à l'élément plan et indépendante par suite de l'orientation de celui-ci. *Les actions de première espèce n'empêchent donc pas beaucoup le glissement des particules les unes sur les autres; elles constituent l'élasticité des fluides.* Il n'en est pas ainsi

[*] J'avais déjà démontré cette formule et ses conséquences relatives à la théorie de l'élasticité dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 1er juillet 1867. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 44.)

des actions de seconde espèce : de quelque manière que varie la distance de deux molécules, pourvu que ce soit entre d'étroites limites, appelées *limites d'élasticité*, elles tendent, avec une intensité sensiblement proportionnelle aux écarts, à ramener cette distance à sa valeur initiale, et à faire occuper aux diverses parties du corps les mêmes places relatives. *Ce sont*, par conséquent, *ces actions, fonctions de la distance initiale et de l'écartement, qui constituent la solidité*. Navier, Lamé et Clapeyron les comptaient seules dans leurs Mémoires sur l'élasticité des solides, et ils obtenaient ainsi ces expressions des forces élastiques, à un seul coefficient, que plusieurs ont remplacées depuis par d'autres à deux coefficients distincts. On trouverait en effet celles-ci en ajoutant aux expressions anciennes et incomplètes des actions normales N la pression constante, fonction de la densité *actuelle*, que donnent les actions de première espèce, et qui introduirait, outre une partie principale, antérieure aux déplacements observés, un terme proportionnel à la petite dilatation θ.

L'expérience montre que les actions de deuxième espèce ne subsistent pas intégralement, quand les dilatations linéaires, rapports des variations δr des distances à leurs valeurs primitives r, dépassent certaines valeurs positives très-petites. Dans ce cas, le corps se constitue dans un état d'agrégation distinct du premier, c'est-à-dire qu'il s'établit un nouvel arrangement moléculaire rendant prépondérantes certaines actions primitivement moindres, et *vice versa*. Si les dilatations continuent à grandir, et surtout se produisent avec rapidité, les actions de seconde espèce disparaissent même brusquement, et il y a *rupture* du corps.

39. Le phénomène de la fusion n'est qu'un cas particulier de la *rupture*, savoir, le cas où les vibrations calorifiques, très-rapidement variables de phase d'un point à l'autre, acquièrent une amplitude assez grande pour que les rapports des variations des distances des molécules très-voisines à ces distances mêmes dépassent les limites compatibles avec la solidité. En ce moment, les actions de première espèce subsistent seules, et le corps devient fluide. De plus, les réactions continuelles exercées par la partie qui fond sur ce qui l'entoure, et en vertu desquelles cette partie se maintient en équilibre de température

avec ses voisines, diminuent notablement au moment où ses actions de seconde espèce sont détruites et où elle perd par conséquent une fraction de son élasticité. Cela revient à dire que sa température s'abaisse aussitôt, ou qu'il se produit à travers sa surface et vers son intérieur un appel d'énergie étrangère, jusqu'à ce que les flux de chaleur venus de ses voisines, et qui l'envahissent à l'instant, lui aient rendu une puissance de réaction suffisante. Ainsi s'explique la *chaleur latente* que tout corps solide absorbe, sans s'échauffer, au moment où il se fond.

On conçoit qu'il en soit de même de quelque manière que la solidité soit détruite, comme, par exemple, par voie de dissolution; il y aura dans tous ces cas destruction d'une certaine quantité de chaleur sensible, provenant de ce que les actions qui constituent la solidité cesseront de concourir à la réaction calorifique exercée par le corps considéré sur ses voisins.

Enfin, la densité et par suite les distances moyennes des molécules étant assez peu différentes à l'état solide et à l'état liquide issu de la fusion, les actions de première espèce, qui subsistent seules dans le second de ces états, doivent y conserver à peu près la même intensité qu'avant la fusion, et comme elles n'y sont plus aidées, dans la production de la réaction calorifique du corps sur ses voisins, par les actions de seconde espèce, un même accroissement de la température doit correspondre à une plus grande augmentation d'énergie interne ou de chaleur dans le second de ces états que dans le premier. Ainsi s'explique ce fait général, d'après lequel le calorique spécifique d'un corps est plus grand à l'état liquide qu'à l'état solide.

40. Il n'y a rien d'invraisemblable à ce que les forces de première espèce dépendent de la densité ρ; car il se peut que la matière interposée entre deux molécules gêne leur action réciproque, et d'autant plus qu'elle est plus dense. Quant à la manière dont ces actions varient avec la distance r, on conçoit qu'elles doivent être répulsives ou négatives pour r très-petit, et ne devenir attractives, comme elles sont aux distances finies, qu'à partir d'une certaine valeur de r : si, en effet, l'attraction existait aux plus petites distances, la matière ne tarderait pas à être infiniment condensée.

La pression exercée sur un élément plan mené à l'intérieur d'un

fluide résulte donc d'actions moléculaires qui sont, les unes répulsives, les autres attractives, et l'on conçoit qu'elles puissent se neutraliser ou avoir une somme nulle, quand le fluide est placé dans le vide, tout en restant individuellement très-énergiques.

41. La fusion et la dissolution, qui changent un solide en un fluide appelé *liquide*, sans faire varier beaucoup sa densité, ne sont pas les seuls moyens de passage à l'état fluide. On conçoit que les vibrations calorifiques d'un corps, liquide ou même solide, quand elles ont atteint une certaine grandeur et qu'elles viennent surtout à subir accidentellement des variations brusques, puissent détacher de ce corps un certain nombre de molécules placées à sa surface libre, pareillement à ce qu'on voit se produire, dans le phénomène du *déferlement*, à la surface d'une eau agitée. L'expérience montre que les molécules ainsi détachées se constituent, tout autour du corps, dans un état de fluidité particulier, caractérisé par la petitesse de la densité, et qu'on appelle *état gazeux*. Sa formation est accompagnée d'une perte de *chaleur sensible* ou d'une absorption de chaleur latente, provenant, non-seulement du travail que peuvent produire les pressions exercées par les particules ainsi dilatées sur ce qui les entoure, mais encore et surtout de l'accroissement d'énergie potentielle interne, dû à la brusque et considérable augmentation des distances moléculaires.

§ IX.

ESSAI SUR LA THÉORIE MOLÉCULAIRE DES GAZ.

42. Les gaz prennent le nom de *vapeurs* quand ils sont soumis à des pressions voisines de celles qu'on appelle leurs *tensions maximum*, et qui seraient nécessaires pour produire chez eux le brusque accroissement de densité constituant le passage à l'état liquide; dans cet état, ils obéissent, comme les liquides eux-mêmes, à des lois trop compliquées pour qu'il ne soit pas prématuré de chercher la forme de la fonction $F(r, \rho)$ qui représente leurs actions moléculaires; mais on conçoit que cette fonction tende vers une forme simple quand la densité ρ tend vers zéro, et se réduise sensiblement à cette forme pour ρ

très-petit, c'est-à-dire dans le cas des gaz éloignés de leurs points de liquéfaction. Comme d'ailleurs la fonction $F(r, \rho)$ doit croître lorsque ρ diminue, la forme la plus simple qu'elle puisse avoir est celle-ci :

$$\varphi = \frac{\chi(r)}{\rho}. \tag{22}$$

Nous appellerons *gaz parfaits* les fluides chez lesquels l'action moléculaire aurait exactement cette expression : une telle dénomination sera justifiée si nous démontrons que les gaz réels se rapprochent beaucoup, par toutes leurs propriétés connues, de ce type idéal. Or c'est ce que je me propose d'établir ici, et il ne sera même nullement nécessaire, pour cela, de faire varier d'un gaz à l'autre la forme, d'ailleurs inconnue, de la fonction $\chi(r)$, ce qui me porte à croire que l'action moléculaire est en effet représentée, chez tous les gaz assez éloignés de leurs points de condensation, par une seule et même formule (22).

43. Évaluons d'abord la pression exercée, à l'intérieur d'un gaz parfait, sur un élément plan quelconque. Nous considérerons, pour cela, deux éléments de volume matériels, exprimés par $d\varpi$, $d\varpi'$ quand toutes les molécules qui les composent occupent leurs situations moyennes, ayant pour masses respectives $\rho d\varpi$ $\rho d\varpi'$, et situés, l'un d'un côté, l'autre de l'autre de l'élément plan : nous appellerons r la distance des positions moyennes de leurs centres de gravité, $r + \Delta r$ la distance vraie de ces centres à l'époque t, distance dans laquelle la partie variable Δr et son carré Δr^2 sont, en moyenne, d'après les calculs du § V (n° **20**), proportionnels au quotient de l'énergie moléculaire E_m d'un petit volume gazeux v par sa masse M. En développant par la série de Taylor la fonction $\chi(r + \Delta r)$ jusqu'aux termes du second degré inclusivement, et en observant d'ailleurs que la densité générale ρ, à l'intérieur d'une sphère de rayon R comprenant les deux éléments de volume $d\varpi$, $d\varpi'$, reste ce qu'elle serait si toutes les molécules se trouvaient constamment dans leurs situations moyennes, il vient, pour l'action respective des deux éléments de volume,

$$\rho d\varpi d\varpi' \chi(r) + \rho d\varpi d\varpi' [\chi'(r)\Delta r + \tfrac{1}{2}\chi''(r)\Delta r^2]. \tag{23}$$

Considérons d'abord le second terme de cette expression, qui seul dépend des Δr, c'est-à-dire de la température T. La parenthèse qu'il contient est, en moyenne, proportionnelle à $\frac{E_m}{M}$, d'après ce qui vient d'être dit au sujet des valeurs moyennes des Δr et de leurs carrés, et, comme ce terme est, en outre, affecté du facteur ρ, variable d'un gaz à l'autre, la somme des valeurs qu'il prend quand on applique l'expression (23) à toutes les actions moléculaires de même direction exercées à travers un élément plan d'une étendue donnée, est proportionnelle au produit $\rho \frac{E_m}{M}$, qui devient $\frac{E_m}{V}$, en y substituant à M son expression ρV. Par suite, la résultante totale des actions exercées dans tous les sens à travers un élément plan, et provenant des mêmes seconds termes, sera simplement égale, par unité de surface de l'élément plan, au produit de $\frac{E_m}{V}$ par un coefficient k dépendant de la forme de la fonction $\chi(r)$.

Le premier terme de (23) est la partie de l'action moléculaire qui seule subsiste quand la température absolue devient nulle. Ce terme introduit, dans l'expression de la pression exercée à travers un élément plan quelconque, une partie simplement proportionnelle au facteur ρ qu'il contient, et qui seul y varie d'un point à l'autre du gaz ou même d'un gaz à l'autre; mais on conçoit que cette partie puisse être négligeable à cause de la petitesse du facteur ρ, si les valeurs négatives de $\chi(r)$ y neutralisent sensiblement ses valeurs positives, ainsi que cela arrive pour des liquides soumis à des pressions assez peu considérables. C'est, en effet, ce qui a lieu; car l'ensemble des phénomènes concernant les gaz porte à croire que ces corps, privés de toute chaleur, sont incapables d'exercer des pressions mesurables. En réduisant donc la pression p à sa seconde partie et substituant au besoin à E_m sa valeur (14) (n° **26**), il vient

$$(24) \qquad p = k\frac{E_m}{V}, \quad \text{ou} \quad pV = kE_m = ke_m MT.$$

Cette relation équivaut à la loi suivante, qui contient à la fois celles de Mariotte et de Gay-Lussac : *Le produit d'un petit volume gazeux*

par la pression qu'il exerce sur l'unité de surface des éléments plans passant par un quelconque de ses points est égal à un coefficient dont la valeur ne change pas d'un gaz à l'autre, multiplié par l'énergie actuelle moléculaire du volume considéré, c'est-à-dire par une quantité proportionnelle tout à la fois à la masse et à la température absolue du volume gazeux considéré.

44. Calculons actuellement l'énergie interne totale U du même volume gazeux. Nous n'aurons, pour cela, qu'à appliquer la formule (13) du § V (n° **22**). L'action moléculaire φ étant ici donnée par (22), sa dérivée en r est

$$\frac{\chi'(r)}{\rho} - \frac{\chi(r)}{\rho^2}\frac{d\rho}{dr}, \quad \text{ou simplement} \quad \frac{\chi'(r)}{\rho},$$

car la dérivée de ρ par rapport à r est négligeable, vu que la densité ne serait qu'extrêmement peu changée par des déplacements quelconques ou même par la suppression des deux molécules dont r désigne la distance. La fonction φ et sa dérivée en r sont donc, pour tous les gaz, les produits respectifs de deux mêmes fonctions $\chi(r)$, $\chi'(r)$ par l'inverse de la densité ρ, inverse qui est ici ce que j'ai appelé ε au § V (n° **20**). D'autre part, la partie $\psi(r, r', \ldots)$ de l'énergie potentielle moléculaire, qui ne dépend pas de la température, peut s'évaluer, en supposant constamment nulles les vibrations calorifiques, hypothèse qui donne, dans les deux équations (17) et (18) (n° **34**), $dQ = 0$, $U = \psi$, et aussi $d\varpi = 0$, puisque la pression p d'un gaz sans chaleur est sensiblement nulle. L'équation (17) devient donc $d\psi = 0$; la fonction ψ est une simple constante, dont on peut faire abstraction, et la formule (13), si l'on y remplace au besoin E_m et E_a par leurs valeurs (14) et (15), se réduit à

$$(25) \quad U = (1+f)E_m + (1+f')E_a = [(1+f)e_m + (1+f')e_a]\,\text{MT}.$$

D'où les deux lois suivantes, qui reviennent à deux autres, trouvées expérimentalement, la première par M. Joule et la seconde par M. Regnault : *L'énergie interne totale d'un gaz parfait est : 1° indépendante de son volume, 2° proportionnelle à sa température absolue.*

45. Les gaz peuvent être classés en deux catégories, suivant que les vibrations atomiques y sont insensibles, ou suivant que ces mêmes vibrations y absorbent, au contraire, une fraction notable de l'énergie, ce qui annonce chez la molécule une tendance à la décomposition. Dans le premier cas, qui doit comprendre tous les gaz simples, on a $E_a = 0$, et, par suite, en éliminant E_m de (25) au moyen de (24),

$$(26) \qquad U = \frac{1+f}{k} pv.$$

D'après cette relation, applicable seulement aux gaz dont les molécules sont chimiquement les plus stables, *tous les gaz simples, pris à volume égal et à la même pression, possèdent d'égales quantités d'énergie interne ou calorifique.* C'est la loi découverte expérimentalement par Delaroche et Bérard.

Des expériences célèbres de M. Regnault ont montré que cette loi ne s'applique pas bien au chlore et au brome, lesquels sont pour cela, dans les circonstances ordinaires, trop près de leurs points de condensation, mais qu'elle s'étend à l'oxyde de carbone et au bioxyde d'azote, gaz *permanents* ou voisins de l'état gazeux parfait, comme l'hydrogène, l'oxygène et l'azote, et qui se trouvent en même temps, surtout le premier, suffisamment stables au point de vue chimique, c'est-à-dire tels que l'énergie actuelle atomique E_a y soit petite. D'autre part, elle ne s'applique pas à l'hydrogène protocarboné; car ce gaz, bien que permanent, est facilement décomposable par la chaleur. En général : 1° un gaz doit vérifier la loi exprimée par la formule (26), s'il résiste énergiquement à la liquéfaction et à la décomposition chimique, ce qui est le cas des cinq premiers gaz permanents cités plus haut et aussi, sensiblement, de l'acide chlorhydrique, dont la condensation et la *dissociation* sont, toutes les deux, difficiles à produire; 2° un gaz doit s'écarter, au contraire, de la même loi s'il est aisément liquéfiable ou décomposable, ou l'un et l'autre à la fois, comme le sont, à un plus haut degré que les précédents, l'acide carbonique, la vapeur d'eau, le protoxyde d'azote, l'hydrogène sulfuré, etc.

46. Je n'ai considéré jusqu'ici qu'un gaz homogène. S'il s'agit, au contraire, d'un mélange de plusieurs gaz, supposés d'abord à l'état

d'équilibre, c'est-à-dire sans courants intérieurs ou sans autres mouvements que les vibrations calorifiques, chacun d'eux paraît n'être soumis qu'à sa propre pression, ou se comporter comme s'il occupait seul l'espace dans lequel il est distribué, et les vapeurs elles-mêmes ne diffèrent pas, en cela, des gaz les plus éloignés de leurs points de condensation : seuls, les liquides ou les solides qui s'opposent à l'expansion du mélange subissent une pression égale à la somme de toutes celles qu'exercent les gaz mélangés. Il semble donc que des gaz différents ne réagissent les uns sur les autres, avec une grande intensité, qu'à des distances tout au plus comparables à leurs intervalles moléculaires moyens, en sorte qu'une molécule quelconque de l'un d'eux ne soit soumise qu'à l'action de celles de son espèce qui l'entourent, et, en outre, à l'action beaucoup plus faible des molécules des autres espèces qui s'en trouvent extrêmement rapprochées.

Mais, si l'un des gaz entre en mouvement, des résistances croissant avec la vitesse doivent se développer entre ses molécules et celles des autres gaz en présence; car les rapprochements et, par suite, les conflits qui se produisent entre elles doivent être d'autant plus nombreux et d'autant plus considérables que la vitesse du gaz en mouvement est plus grande. Ainsi s'explique la lenteur relative avec laquelle se mélangent, ou se *diffusent* l'un dans l'autre, deux gaz mis en présence, malgré l'absence de pression statique exercée par l'un d'eux sur l'autre; et cette lenteur est bien plus grande encore quand les gaz sont séparés par une cloison poreuse beaucoup plus résistante qu'aucun d'eux, telle, par exemple, qu'une couche de plâtre, une feuille de papier, une plaque de graphite. On peut voir, au § X d'un Mémoire *sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides* (*Journal de M. Liouville*, t. XIII, 1868), qu'il est facile d'établir théoriquement, de ce point de vue, la loi que M. Graham a expérimentalement trouvée, et d'après laquelle *la vitesse de diffusion de chaque gaz à travers la paroi poreuse est en raison inverse de la racine carrée de sa densité et indépendante de la présence des autres gaz.*

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences et des Lettres de Montpellier, le 8 juillet 1872, et publié la même année dans le Recueil des Mémoires de cette Académie.)

Note complémentaire au Mémoire précédent — Sur les principes de la théorie des ondes lumineuses qui résulte des idées exposées au § VI.

PAR M. J. BOUSSINESQ.

La théorie de la lumière que je me suis contenté d'indiquer au § VI (n° **24**), a été développée, comme je l'ai dit, dans plusieurs Mémoires des tomes XIII (1868) et XVII (1872) du *Journal de Mathématiques*. M. de Saint-Venant en a résumé les principes et les résultats, avec une grande clarté, aux n^{os} **25** à **54** de l'Étude, également citée plus haut, *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*. Toutefois, on voudra bien me permettre d'exposer de nouveau ces principes avec quelques développements dont je ne les avais pas encore accompagnés, dans le but de montrer qu'on ne doit pas les accuser « de substituer à l'analyse mécanique des phénomènes une sorte de symbole analytique d'une généralité telle, qu'ils y soient tous compris », mais plutôt que ce symbole, le seul qui ait pu, jusqu'à ce jour, embrasser tous les faits, est la traduction analytique de la manière la plus simple et, *a priori*, la plus vraisemblable dont on puisse se représenter le mouvement vibratoire lumineux dans les corps transparents. J'espère répondre ainsi à une objection soulevée par M. Sarrau, dans un article récent des *Annales de Chimie et de Physique* [*].

I. — Quand, en vue de comprendre la propagation de la lumière dans le vide et les circonstances d'interférence ou de diffraction qu'elle présente, on a admis l'existence, dans tous les espaces intra-stellaires, de l'éther, c'est-à-dire d'un milieu très-divisé et très-peu dense, mais

[*] Quatrième série, février 1873, t. XXVIII, p. 266 à 273. — *Observations relatives à l'analyse faite par M. de Saint-Venant des diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses.*

d'une élasticité relativement considérable qui lui permette de propager avec une énorme vitesse des ondes à petites vibrations transversales, il reste encore à expliquer, avec toutes leurs lois si variées, les phénomènes qui concernent la marche de la lumière à l'intérieur des corps transparents ou de part et d'autre de leurs surfaces de séparation. La nécessité d'obtenir, même en pareil cas, des vitesses de propagation sans comparaison plus grandes que celle du son, ne permet pas d'attribuer ces phénomènes à l'élasticité propre de la matière pondérable, et l'on est inévitablement conduit à supposer que c'est l'éther, logé à l'intérieur du corps transparent, qui vibre lorsque des rayons de lumière ou de chaleur rayonnante traversent ce dernier. La facilité que l'éther possède de pénétrer ainsi et même de circuler librement à travers les pores de la matière pondérable s'explique, si l'on admet, d'une part, que celle-ci est composée de molécules laissant entre elles des espaces beaucoup plus grands que celui qu'elles occupent, et, d'autre part, que l'éther, au lieu d'être, lui aussi, condensé en molécules, se trouve incomparablement plus divisé et par suite plus dilaté, ou à l'état d'atomes exerçant entre eux ces actions, les plus énergiques de toutes par unité de masse, qu'on appelle *atomiques* ou *chimiques*, mais dont l'intensité n'est sensible qu'à des distances au plus comparables aux dimensions d'une molécule [*]. Et l'on conçoit qu'un tel milieu puisse, plus que tout autre, se comporter comme un corps solide très-élastique, tant qu'on ne lui imprime qu'un mouvement vibratoire d'une amplitude suffisamment petite, tout en devenant un fluide d'une résistance insensible, à cause de sa faible masse, dès que ses limites d'élasticité, très-resserrées, sont dépassées, un fluide incapable, en un mot, de ralentir notablement le moindre mouvement perceptible d'un corps qui le traverse.

II. — Les molécules pondérables se trouvant ainsi disséminées dans l'éther, comme le sont, dans l'air ou dans l'eau, les poussières qui y voltigent ou y nagent, ou comme le sont encore, à la surface d'un

[*] La dispersion étant incomparablement plus grande dans les corps que dans le vide, où l'on n'a pu jusqu'à ce jour en constater l'existence, le rayon d'activité des actions moléculaires de l'éther doit même être beaucoup plus petit, vis-à-vis d'une longueur d'onde, que ne le sont les dimensions d'une molécule pondérable.

liquide, un grand nombre de petits corps flottants, il est inévitable que ces molécules se mettent à vibrer dès que l'éther interposé entre en vibration lui-même. Il peut arriver deux cas principaux, comme il a été dit au n° 24 (§ VI) du Mémoire : 1° le mouvement ainsi transmis à la matière pondérable met en jeu, entre les molécules de celle-ci, des forces élastiques qui tendent à le conserver, ou qui suffiraient à elles seules pour le continuer dès qu'il a été produit une fois, et le corps, accomplissant des vibrations d'une amplitude de plus en plus grande, se chauffe ou transforme en *chaleur interne*, qui lui devient propre, la demi-force vive empruntée à l'éther; 2° ou bien, tout au contraire, le mouvement considéré ne fait naître entre les molécules pondérables que des actions discordantes, incapables de le continuer à elles seules, et par suite de l'augmenter avec le concours des impulsions, sans cesse renouvelées, de l'éther vibrant. Dans ce second cas, les quantités de mouvement prises, suivant trois axes rectangulaires de coordonnées, par la matière pondérable, ne peuvent grandir d'un instant à l'autre qu'autant que celles de l'éther grandissent elles-mêmes : l'hypothèse la plus naturelle qu'on puisse faire, sur les rapports qu'ont entre elles les premières et les secondes de ces quantités de mouvement, consiste à admettre qu'elles sont du même ordre de grandeur. Mais alors le produit de la densité de l'éther par son déplacement vibratoire parallèle à un axe coordonné est comparable au produit de la densité de la matière pondérable par son déplacement pareil, et il en est par suite de même, si l'on remplace, dans ces produits, les déplacements par leurs dérivées premières, prises le long d'un même élément rectiligne quelconque. Or les dérivées ainsi introduites représentent, comme on sait, les déformations éprouvées par chaque espèce de matière, et sont de même ordre de grandeur que les rapports des forces élastiques mises en jeu, dans chaque milieu respectif, à un coefficient d'élasticité correspondant : on peut leur substituer ces rapports sans changer l'ordre de grandeur des produits considérés. Et si l'on observe enfin que le quotient de la densité par un coefficient d'élasticité est comparable, d'après une formule connue d'acoustique, à l'inverse du carré de la vitesse des ondes que peuvent propager, dans chaque milieu en particulier, ses forces élastiques, les produits considérés, qui devront être du même ordre de grandeur

pour la matière pondérable et pour l'éther, deviendront les quotients des forces élastiques mises en jeu à travers l'unité de surface d'un élément plan, dans chacune des deux espèces de matière, divisées respectivement par le carré de la vitesse du son pour la matière pondérable et par celui de la vitesse de la lumière pour l'éther. Les forces élastiques développées entre les molécules pondérables d'un corps transparent, à travers un élément plan et pendant que ces molécules vibrent lumineusement, sont donc, en comparaison de celles qui se produisent dans l'éther à travers le même élément plan, aussi petites que l'est le carré de la vitesse du son par rapport au carré de celle de la lumière, c'est-à-dire entièrement négligeables.

III. — Ainsi, les forces élastiques de la matière pondérable n'interviennent pas sensiblement dans les phénomènes lumineux, puisqu'elles y restent tout à fait insensibles vis-à-vis de celles de l'éther, et l'on peut étudier ces phénomènes en supposant les molécules des corps indépendantes les unes des autres, ou soumises, chacune, à la seule action du fluide éthéré environnant. Or, dans la nature, tous les mouvements dépendants de causes périodiques ne tardent pas à devenir périodiques eux-mêmes : il est par suite rationnel d'admettre que chaque molécule, abandonnée à l'impulsion de l'éther qui l'entoure, vibrera bientôt à l'unisson de cet éther, ou de manière à se retrouver dans une même position, chaque fois que l'état du fluide éthéré voisin se retrouvera le même, c'est-à-dire chaque fois que les déplacements u, v, w, suivant trois axes rectangulaires fixes, des divers atomes qui le composent, reprendront leurs valeurs premières. On sait, d'ailleurs, que les déplacements des points d'un milieu très-voisins de celui dont la position d'équilibre a les coordonnées x, y, z, sont définis ou déterminés : 1° à une première approximation, si l'on connaît les déplacements u, v, w de ce point (x, y, z); 2° à des degrés de plus en plus élevés d'approximation, si l'on connaît en outre les dérivées premières en x, y, z de u, v, w, leurs dérivées secondes, troisièmes, etc. Les déplacements u'_1, v'_1, w'_1 d'une molécule pondérable deviennent donc des fonctions de u, v, w et de leurs dérivées partielles des divers ordres, fonctions qu'on peut supposer linéaires (vu la petitesse excessive des variables) et sans termes constants, comme

on le fait toujours en cas pareil, par l'emploi de la série de Taylor, quand on étudie une fonction aux environs d'un point pour lequel elle s'annule, et qu'on n'aperçoit aucune raison de supposer ses dérivées premières nulles ou discontinues en ce point. Les déplacements moyens u_1, v_1, w_1, suivant les axes, de la matière pondérable contenue à l'intérieur d'un petit volume quelconque s'obtiendront en multipliant la masse de chacune des molécules qui en font partie par son déplacement parallèle à l'axe considéré, et en divisant la somme des produits pareils par la masse totale des molécules; ces déplacements moyens seront donc aussi, à fort peu près, des fonctions linéaires, sans termes constants, des déplacements u, v, w de l'éther, en un point pris à l'intérieur du volume considéré ou tout près, et de leurs dérivées par rapport à x, y, z.

Lorsque le corps transparent n'est pas animé d'une vitesse de translation comparable à celle de la lumière, on peut supposer sensiblement fixes les positions moyennes à partir desquelles se comptent les déplacements de ses molécules, et alors les accélérations moyennes de celles-ci, correspondantes au mouvement lumineux, ont pour composantes suivant les trois axes $\frac{d^2u_1}{dt^2}$, $\frac{d^2v_1}{dt^2}$, $\frac{d^2w_1}{dt^2}$. Les produits $-\rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2v_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2w_1}{dt^2}$ de ces accélérations par la densité ρ_1, changée de signe, de la matière pondérable, représentent alors, par unité de volume, les inerties, dues au mouvement vibratoire, de la même matière, ou, ce qui revient au même, la réaction totale exercée sur l'unité de volume d'éther par les molécules du corps, puisque celles-ci ne sont soumises à chaque instant qu'aux impulsions du fluide qui les environne. Et les trois équations du mouvement de l'éther, dont ρ désignera la densité, s'obtiendront enfin en égalant sa force motrice par unité de volume et suivant chaque axe, $\rho\frac{d^2u}{dt^2}$, $\rho\frac{d^2v}{dt^2}$, $\rho\frac{d^2w}{dt^2}$, à la somme des forces de même sens qui lui sont appliquées et qui se composent, d'abord, d'une action élastique exercée sur l'unité de volume de la particule considérée d'éther par ses voisines, en deuxième lieu, d'une des trois composantes, $-\rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2v_1}{dt^2}$, $-\rho_1\frac{d^2w_1}{dt^2}$, de la réaction de la matière pondérable.

Je ne m'arrêterai pas ici à démontrer les expressions, un peu moins simples, que prennent, dans ces équations, les accélérations vibratoires de la matière pondérable, quand le corps transparent est animé d'un mouvement rapide de translation. Je renverrai le lecteur qui désirerait étudier cette intéressante question, au § III de l'*Addition au Mémoire intitulé* : « *Théorie nouvelle des ondes lumineuses.* » (*Journal de M. Liouville*, fin du tome XIII, 1868.)

IV. — On voit que les formules auxquelles nous avons été conduits pour représenter l'action dynamique de la matière pondérable sur l'éther, dans les phénomènes lumineux, résultent d'une série d'hypothèses vraisemblables, dont chacune paraît même presque inévitable. Il est vrai qu'on pourrait aller plus loin et demander comment une résistance ayant cette expression peut être produite par des forces exercées d'atome à atome et dépendant, pour chaque couple de deux atomes, de leur distance *et de celles des atomes voisins*. Malheureusement un calcul de ce genre est au-dessus de la puissance de l'analyse actuelle, même dans le cas le plus simple que l'on puisse se poser, c'est-à-dire quand il s'agit d'un corps animé d'un mouvement rectiligne et uniforme à travers un fluide en repos. Il y a donc peu de chance qu'on puisse de longtemps l'aborder dans le cas bien plus complexe d'un corps battu par un milieu qui l'entoure et qui est soumis à des mouvements périodiques, comme il arrive, au sein de l'éther, pour chaque molécule pondérable. Cauchy, il est vrai, a essayé d'étudier les vibrations simultanées de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement; mais il admet que la distance de deux points matériels agissant l'un sur l'autre n'y varie, aux diverses périodes du mouvement, que de quantités très-petites par rapport à sa valeur moyenne : ce qui lui permet de développer les actions moléculaires, en séries très-convergentes, suivant les puissances ascendantes des petites parties variables de toutes les distances pareilles. Or une telle hypothèse ne me paraît pas plus permise quand on étudie la réaction exercée sur l'éther vibrant par une molécule d'un corps transparent, que lorsqu'il s'agit de la résistance opposée par l'air au mouvement d'un projectile qui le traverse. Dans un cas autant que dans l'autre, les actions mutuelles doivent être en effet exercées entre la couche

superficielle de la molécule ou du projectile et les particules adjacentes du fluide, particules qui se renouvellent sans cesse et dont chacune ne doit être active en un même endroit que pendant un instant très-court : les distances dont dépendent les actions élémentaires qui constituent, par leur résultante, la force totale à évaluer, ne varient donc pas entre d'étroites limites, de part et d'autre de leurs valeurs moyennes; il serait plus exact de supposer chacune d'elles, au moment où elle intervient, d'abord décroissante de ∞ à sa valeur minimum, et puis croissante de cette valeur à ∞.

L'impossibilité où l'on s'est trouvé jusqu'ici, faute de moyens analytiques assez puissants et faute aussi de données expérimentales suffisantes, d'introduire, dans la plupart des théories physiques, les actions élémentaires exercées d'atome en atome à des distances imperceptibles, n'empêche pas ces théories de satisfaire l'esprit, quand elles sont basées d'ailleurs sur des hypothèses simples et vraisemblables, telles, en un mot, que l'observation même des faits conduit à les poser. C'est ainsi, par exemple, que, dans la théorie analytique de la chaleur, étude de la distribution des températures (supposées assez peu variables) aux divers points d'un corps athermane, on se dispense de calculer les travaux individuels, correspondants aux vibrations calorifiques, des actions moléculaires exercées à travers un élément plan quelconque, bien que la somme de ces travaux constitue une quantité, appelée *flux de chaleur*, que l'on ne peut se dispenser d'évaluer; mais, s'appuyant simplement sur ce fait que le flux dont il s'agit, fini par unité de surface et dans l'unité de temps, dépend de la distribution des températures dans une très-petite étendue autour de l'élément plan et s'annule quand ces températures deviennent égales, on se contente d'observer qu'il doit être une fonction linéaire, sans terme constant, des trois petites dérivées partielles, par rapport à x, y, z, de la température en un point de l'étendue considérée; car ces dérivées, jointes à la température produite au même point, définissent suffisamment l'état calorifique dans un petit espace tout autour. De même, quand on étudie les frottements intérieurs d'un fluide, c'est-à-dire d'un corps très-facile à déformer, ou qui a une grande aptitude à passer d'un état d'équilibre stable à un autre très-voisin, on évite le calcul des actions individuelles des molécules, en observant que les

résistances opposées par le fluide à ses déformations doivent être d'autant plus grandes qu'est plus grand lui-même le nombre des états moléculaires distincts, ou d'équilibre stable, par lesquels il passe dans l'unité de temps, et en égalant par suite ces résistances à des fonctions des dérivées premières en x, y, z des trois composantes de la vitesse au point considéré, dérivées qui y caractérisent la rapidité actuelle des déformations. Ces fonctions peuvent même être supposées linéaires, lorsque les vitesses varient graduellement d'un point à l'autre et sont ainsi peu différentes pour deux points voisins. La théorie de l'élasticité, étude des déformations très-petites qui n'altèrent pas la contexture des corps, mais qui, laissant constamment les mêmes molécules en présence les unes des autres, ne modifient que légèrement leurs rapports, semble se prêter beaucoup plus aux calculs d'actions moléculaires, et, de fait, on les y a souvent employés : on aurait dû cependant n'en faire usage qu'avec une extrême réserve; car ces calculs ne peuvent guère s'effectuer qu'en négligeant le mouvement vibratoire calorifique, ou en raisonnant comme si toutes les molécules occupaient à chaque instant leurs situations relatives moyennes, ce qui ne me paraît suffisamment exact qu'à des températures voisines du zéro absolu ou tout au moins très-distantes, pour chaque corps solide, de son point de fusion : le mieux est peut-être encore d'observer que les forces élastiques dépendent des petites déformations éprouvées par le corps et doivent en être par suite des fonctions linéaires. On a pareillement recours à un principe spécial très-simple, vraisemblable *a priori* et confirmé par l'expérience, dans toute partie de la mécanique où l'on traite d'autres mouvements que de ceux d'un système de points matériels situés, dans le vide, à des distances finies les uns des autres : telles sont, par exemple, l'étude de la résistance opposée par un milieu au mouvement d'un projectile, celle du frottement mutuel de deux solides, la *plasticodynamique*, recherche, inaugurée depuis peu, des lois de la déformation, assez lente, mais continue, des corps ductiles, et même la théorie des corps dits *rigides*, et celle des liquides et des gaz dans les circonstances où la fluidité parfaite est approximativement admissible. Toutefois, dans ces derniers cas, la considération directe des actions moléculaires peut servir à expliquer plusieurs faits et, s'il s'agit des gaz, à établir diverses lois de

simple proportionnalité, comme on a vu aux §§ VIII et IX du Mémoire précédent; mais chaque formule contient encore, pour le moins, un coefficient dont il faut demander la valeur à l'expérience, et qu'il ne serait pas facile de calculer, alors même que l'expression exacte de l'action de deux molécules se trouverait entièrement connue.

Toutes les branches de la philosophie naturelle, à part la théorie du mouvement des astres assimilés à de simples points, ont donc été édifiées jusqu'à ce jour sur quelques principes éminemment simples, propres à chacune, au moyen desquels on est dispensé de remonter jusqu'au calcul des actions individuelles des molécules très-voisines, et qui, combinés avec la grande loi de la continuité des fonctions et avec les théorèmes généraux de la conservation des quantités de mouvement, des moments ou des forces vives, suffisent pour établir rationnellement les lois plus ou moins approchées reconnues par les physiciens et bien d'autres encore sur lesquelles l'expérience n'a pas été consultée. On peut regretter sans doute que toutes ces belles lois, au lieu de nous révéler en détail les mystères du monde des atomes, ou infiniment petits de la nature, sur lequel elles semblaient devoir nous éclairer, ne soient que la traduction, sous mille formes différentes, de quelques faits simples, qu'un premier coup d'œil jeté sur le monde rend en quelque sorte évidents, et qui ne concernent que l'action totale de particules matérielles dont chacune contient un nombre immense de molécules; mais, d'un autre côté, le géomètre ne saurait être fâché de voir l'analyse mathématique lui dérouler les magnifiques conséquences des idées les plus simples et les plus communes. La vue de la richesse de ces idées, dont l'épanouissement constitue une si grande partie de la science humaine, vaut peut-être plus que la connaissance détaillée de toutes les forces individuelles qu'elles négligent pour embrasser leur effet général; car la simplicité, qui seule nous les rend intelligibles et intéressantes, tient probablement à ce que nous observons des effets moyens où les discordances individuelles disparaissent et se neutralisent en vertu de la *loi des grands nombres*. S'il nous était donné, au contraire, de voir les détails, nous serions tentés peut-être, à cause des bornes actuelles de notre esprit, de ne trouver que désordre et incohérence dans le monde des infiniment petits, pareillement à ce qui arrive quand nous nous perdons dans la multi-

plicité des phénomènes que nous offre le monde plus grand placé à notre portée [*].

V. — Quoi qu'il en soit, et pour revenir à notre sujet particulier, la théorie de la lumière n'est pas plus tenue que les autres parties de la mécanique de déduire dès à présent, d'actions d'atome à atome simples fonctions des distances, toutes les formules dont elle a besoin, et notamment les expressions, relatives à la réaction de la matière pondérable sur l'éther, que des considérations simples et naturelles lui indiquent comme les plus vraisemblables. Il suffit, pour que ces expressions soient acceptables, qu'elles se prêtent aisément à l'explication de tous les phénomènes lumineux, et elles le seront surtout tant que des faits importants, comme ceux dont je parlerai à la fin de ces pages, resteront en dehors de toutes les autres théories connues.

Rien ne s'oppose donc à ce qu'on admette pour composantes, suivant les axes, de l'action exercée par la matière pondérable sur l'unité

---

[*] Il me paraît de même probable qu'en égalant, dans les phénomènes chimiques, toute modification réalisée durant un instant infiniment petit dt, et rapportée à l'unité de temps, à une simple fonction linéaire de chacune en particulier des causes, d'une intensité évaluable et modérée, qui interviennent dans sa production, on réussira un jour, sans connaître d'ailleurs les détails intimes des décompositions et des combinaisons, à représenter analytiquement, avec une approximation suffisante, la marche des réactions qui s'effectuent dans des circonstances déterminées; c'est en entrant dans cette voie qu'on peut espérer soumettre aux lois du nombre, dans tous les cas où les chimistes trouveront assez de simplicité pour démêler en effet des lois, l'état dynamique, à chaque instant variable, d'un milieu où la composition des molécules n'a pas encore atteint cet équilibre plus ou moins stable vers lequel elle tend et que l'on a étudié jusqu'ici d'une manière à peu près exclusive.

Il a paru sur ce sujet, au t. XVII des *Annales de Chimie et de Physique* (4e série, novembre 1872, p. 289 à 371), un Mémoire très-intéressant de M. Georges Lemoine sur la *Théorie des réactions simples limitées par l'action inverse*, avec applications aux transformations successives : 1° d'un mélange gazeux d'iode et d'hydrogène; 2° d'une masse donnée de carbonate de chaux calcinée en vase clos; 3° d'un mélange de phosphore rouge en poudre et de phosphore ordinaire en vapeur. M. Lemoine essaye d'y rendre compte de phénomènes dans lesquels, à une température maintenue constante, on admet qu'il se produit : 1° grâce à un apport suffisant de chaleur, une décomposition spontanée qui s'effectue, à chaque instant et dans chaque petit élément de volume, indépendamment des circonstances extérieures à cet élément de volume et même des autres phénomènes dont il peut être le théâtre, mais simplement d'après

de volume d'éther, les quantités $-\rho_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2}$, $-\rho_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2}$, $-\rho_1 \frac{d^2 w_1}{dt^2}$, où ρ_1 désigne la densité de cette matière et u_1, v_1, w_1 ses déplacements, supposés fonctions de l'état de l'éther environnant, c'est-à-dire, ainsi qu'il a été dit, des déplacements u, v, w d'un atome de cet éther et aussi, à des degrés d'approximation de plus en plus élevés, des dérivées successives de u, v, w en x, y, z. Toutefois l'état dynamique d'un milieu à un moment donné est caractérisé, comme nous avons vu au § I du Mémoire, non-seulement par les positions relatives actuelles de ses divers points, mais encore par leurs vitesses, et il n'y a pas d'invraisemblance à faire dépendre aussi u_1, v_1, w_1, fonctions de l'état dynamique de l'éther, des vitesses $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$. Des considérations de symétrie rendront, il est vrai, cette introduction des vitesses de l'éther dans les expressions de u_1, v_1, w_1 impossible pour la plu-

---

cette loi vraisemblable qu'il y a, durant un instant très-court dt, un nombre d'autant plus grand de molécules atteintes par la décomposition qu'il y a plus de molécules susceptibles de l'éprouver, ce qui revient à supposer la vitesse de la décomposition simplement proportionnelle à la densité de la matière qui la subit ou même, quand celle-ci est solide, comme le carbonate de chaux, et éprouve surtout la décomposition dans ses couches superficielles, sensiblement constante par unité de surface, toutes choses égales d'ailleurs; 2° la combinaison de deux éléments, tous les deux fluides et mêlés, ou l'un fluide et l'autre, solide, ayant ses couches superficielles en rapport avec le premier, combinaison dont la vitesse, dans chaque petit volume où elle se produit, est encore supposée indépendante des circonstances extérieures à ce volume et même du phénomène de décomposition qui s'y effectue en même temps, de manière à être simplement proportionnelle au produit des densités des deux éléments, s'ils sont fluides, et, dans le cas contraire, par unité de surface du solide, au produit de la densité de l'élément fluide par un coefficient dépendant du degré de compacité de l'élément solide, ou, ce qui revient au même quand celui-ci est à l'état de poudre, par unité de volume, au produit de la densité de l'élément fluide par celle de l'élément solide dans le milieu, et par un coefficient, dépendant à la fois du degré de compacité et du degré de division de la poudre considérée, dont les variations d'un instant à l'autre pourront être supposées proportionnelles à la cause qui fera changer ces deux qualités physiques. M. Lemoine s'est borné au cas où deux corps simples, en partie mélangés, en partie combinés, se trouvent seuls actifs, de manière que les effets des deux phénomènes de décomposition et de combinaison dont il s'agit soient inverses et se neutralisent même exactement dans un état limite d'équilibre mobile vers lequel tend le système.

part des corps transparents, et il n'y aura guère que ceux que l'on placera entre les deux pôles d'un aimant puissant qui acquièrent un genre particulier de dissymétrie avec lequel elle soit compatible; mais. dans ce cas, on ne voit pas quel empêchement il pourrait y avoir à l'accepter, si elle permet d'expliquer simplement la rotation du plan de polarisation par le magnétisme, phénomène dont aucune autre théorie exacte (à ma connaissance) n'a pu encore être donnée.

VI. — Les expressions linéaires de u_1, v_1, w_1 en fonction de u, v, w, de leurs dérivées en x, y, z, ou aussi, plus généralement, des dérivées de toutes ces quantités par rapport à t, devront être particularisées de forme, dans chaque cas, d'après le genre spécial de symétrie ou de dissymétrie qu'offriront les corps considérés. Elles devront être, en outre, compatibles avec la transparence, ou telles, que des ondes planes puissent se propager sans subir de diminution appréciable. En effet, les corps transparents, parmi ceux qui le sont un peu et qu'on étudie dans l'optique expérimentale, n'ont qu'un pouvoir absorbant tout à fait insensible sous une épaisseur comparable à une longueur d'onde ou à un demi-millième de millimètre environ, épaisseur suffisante pour que la phase de la vibration y reçoive à chaque instant toutes ses valeurs : les termes qui correspondraient, dans les équations différentielles des mouvements, à l'imperceptible diminution d'intensité provenant de cette cause, ne peuvent qu'être excessivement petits et négligeables, par rapport aux termes principaux qui déterminent les circonstances de phase ou de polarisation des vibrations aux divers points et aux divers instants successifs. Il suffit donc qu'un corps soit translucide, sous une épaisseur d'un millimètre, par exemple, pour qu'on puisse le supposer parfaitement transparent, en tout ce qui dépend de la propagation des ondes dans de petites étendues à son intérieur, et par conséquent en tout ce qui touche aux questions concernant la vitesse de la lumière, la direction et la polarisation des rayons réfléchis ou réfractés, leur intensité de part et d'autre de la surface de séparation de deux milieux, etc. Dans tous ces cas, les expressions de u_1, v_1, w_1 relatives à un corps donné devront rendre possibles des systèmes d'ondes planes d'intensité constante, ou *non-évanescentes*, sans quoi le corps appartiendrait à la catégorie nom-

breuse des corps opaques, et ne serait pas de ceux que l'on se propose d'étudier.

VII. — Il ne suffit pas d'avoir obtenu, en fonction des déplacements u, v, w de l'éther et de leurs dérivées, des expressions de la réaction dynamique exercée en un point de ce milieu par la matière pondérable; il faut encore, pour être en état d'établir les lois des phénomènes lumineux, connaître la constitution de l'éther à l'intérieur des corps, ou avoir, du moins, certaines données sur son élasticité et sur sa densité. L'analogie montre quelle est, sous ce rapport, l'hypothèse la plus vraisemblable et en même temps la plus simple que l'on puisse faire. Un fluide pondérable contenant, disséminées à son intérieur, un grand nombre de particules solides à l'état de poussière, un liquide dont la surface est parsemée d'une multitude de petits flotteurs, de dimensions très-petites par rapport à leurs distances mutuelles, telles sont les deux images que nous choisissons volontiers, dans la sphère des choses observables, pour nous représenter l'éther à l'intérieur des corps, et qui conviennent en effet, si les molécules pondérables sont très-petites par rapport aux espaces intermoléculaires environnants et si, en outre, le rayon d'activité des actions exercées par l'éther ou sur l'éther est tout au plus comparable aux dimensions d'une molécule. Or, dans ces deux cas, la constitution du fluide n'est pas sensiblement modifiée par la présence des particules solides qui y nagent ou y flottent, à l'exception d'une couche extrêmement mince, adhérente à chacune de ces particules, et dont on peut faire abstraction parce qu'elle est négligeable vis à vis du reste. On est donc conduit à supposer l'éther des corps sensiblement pareil à l'éther du vide, pour l'élasticité aussi bien que pour la densité, et à n'attribuer ce qu'il y a de particulier dans sa manière de vibrer lumineusement, qu'aux résistances produites par l'inertie des masses de matière pondérable interposées, relativement énormes, qu'il est obligé de mouvoir à chaque instant.

Des considérations d'un autre genre permettent d'établir la réalité de cette hypothèse comme un fait à peu près incontestable. Tout le monde admet, quand il s'agit de calculer les quantités de lumière réfléchies et réfractées à la surface de séparation de deux corps transpa-

rents, des relations spéciales, que Cauchy a appelées *conditions de continuité*, et qui reviennent à dire que, non-seulement les déplacements u, v, w de l'éther, mais encore leurs dérivées premières suivant la normale à la surface de séparation, ont les mêmes valeurs en deux points voisins pris respectivement à l'intérieur de chacun des deux milieux, autant du moins que l'épaisseur totale des couches superficielles de constitution optique rapidement variable est très-petite vis à vis d'une longueur d'onde. Or ces conditions résultent, quand l'élasticité de l'éther est supposée la même dans les corps que dans le vide, de l'égalité des deux pressions exercées à chaque instant sur les deux faces de la couche mince d'éther qui sépare les deux milieux : elles ne sont en un mot, comme on peut le voir au § VIII de la *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, qu'une application particulière des conditions à la surface employées dans tous les problèmes de Mécanique où il y a des pressions à considérer (sauf de petites perturbations lorsque le phénomène se rattache à la capillarité). Mais il en serait autrement si tous les éthers n'avaient pas la même élasticité, et il y aurait même alors incompatibilité absolue entre l'égalité des pressions dont il vient d'être parlé et les conditions de continuité que l'expérience confirme. Il faut donc attribuer à l'éther d'un corps transparent quelconque la même élasticité et, par suite, la même isotropie qu'à l'éther libre. Et comme on ne conçoit guère un milieu dont l'élasticité resterait invariable, tandis que sa densité pourrait recevoir un grand nombre de valeurs différentes, il est bien permis de regarder la constance de densité de l'éther comme une conséquence naturelle de sa constance d'élasticité.

Enfin, la nouvelle théorie explique facilement, jusque dans les circonstances les plus délicates que l'observation ait révélées [*], la propagation de la lumière à travers les corps animés d'une translation rapide. Une seule hypothèse spéciale, la plus simple qu'il soit possible d'imaginer et qui résulte d'ailleurs des idées déjà exposées sur la constitution de l'éther et sur celle de la matière pondérable, lui suffit pour cela : cette hypothèse consiste à admettre qu'un corps en mouvement traverse l'éther comme le ferait un filet à mailles très-larges,

[*] *Voir* l'article ci-après, extrait des *Comptes rendus* (t. LXXIV; 24 juin 1872).

c'est-à-dire sans l'entraîner sensiblement. Donc l'éther d'un corps ne doit pas différer d'une manière appréciable de l'éther libre, ou de ce qu'il devient à l'instant quand le corps l'abandonne et se transporte ailleurs.

VIII. — Si l'on désigne par λ, μ et ρ les deux coefficients d'élasticité et la densité de l'éther libre, par θ la dilatation cubique $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ et par Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, les trois composantes, suivant les axes, de l'action élastique totale exercée sur l'unité de volume de l'éther d'un corps vaudront donc

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta_2 u, \quad (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \mu\Delta_2 v, \quad (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\Delta_2 w \text{ [*]},$$

et les équations de mouvement qui régissent les variations de u, v, w d'un instant à l'autre s'obtiendront en égalant les sommes respectives de ces expressions et de celles des réactions suivant les axes, $-\rho_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2}$, $-\rho_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2}$, $-\rho_1 \frac{d^2 w_1}{dt^2}$, de la matière pondérable, aux trois composantes $\rho \frac{d^2 u}{dt^2}$, $\rho \frac{d^2 v}{dt^2}$, $\rho \frac{d^2 w}{dt^2}$, de la force motrice de l'éther.

A une première approximation, c'est-à-dire en négligeant les pouvoirs dispersif et rotatoire, u_1, v_1, w_1 sont des fonctions linéaires de u, v, w, à coefficients constants si le milieu est homogène. Les lois approchées qui résultent alors des équations, au moins quand on admet l'hypothèse, toujours réalisée, d'une faible biréfringence, sont un peu plus compliquées que celles de Fresnel, comme on peut le voir dans un Mémoire du t. XVII (1872) de ce Journal. Mais elles s'y réduisent, à cela près que la vibration fait généralement un petit angle avec le plan de l'onde, chez les cristaux des cinq premiers systèmes, qui ont un axe minéralogique perpendiculaire au plan des autres. Quant aux cristaux transparents du sixième système et aux corps homogènes, également transparents, de la contexture la plus générale qu'on puisse imaginer, ils ne peuvent avoir, comme les précécents, que deux axes

[*] *Voir* la sixième des *Leçons sur l'élasticité*, de Lamé, § 26, form. 5.

optiques, et les rayons lumineux peu inclinés sur le plan de ces axes obéissent encore, sauf erreur négligeable, aux lois de Fresnel ; mais il n'en est plus ainsi des rayons notablement inclinés sur le même plan. La constatation, qui est, je crois, encore à faire, de ce résultat du calcul pourrait fournir le sujet d'une expérience intéressante.

Quelque grand que soit le pouvoir biréfringent, la nouvelle théorie montre que les cristaux des cinq premiers systèmes continuent à se comporter, au point de vue optique, comme s'ils avaient trois plans rectangulaires de symétrie de contexture [*]. Mais la surface des ondes n'y est plus en général celle de Fresnel. Elle le devient toutefois, et en toute rigueur, quand on pose $\lambda + 2\mu = 0$, hypothèse revenant à admettre la nullité de la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans l'éther libre; de plus, la vibration, tout en restant, comme le voulait Fresnel, perpendiculaire au plan de polarisation, devient alors normale au rayon lumineux [**], ainsi que paraît l'exiger un calcul exact de la réflexion cristalline. Cette dernière considération est de nature à prouver que l'on a bien en effet $\lambda + 2\mu = 0$, ou plutôt $\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} =$ une quantité peu différente de zéro, relation à laquelle conduit d'ailleurs le calcul des phénomènes de la réflexion vitreuse ordinaire.

Je pense donc qu'il faut supposer nulle la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans l'éther libre : cette hypothèse serait peu acceptable si les actions intérieures de l'éther étaient analogues aux

---

[*] Les considérations qui le démontrent se trouvent à la fin du Mémoire cité, inséré au t. XVII du *Journal de Mathématiques* : elles s'appliqueraient à la question analogue concernant la propagation de la chaleur à l'intérieur des cristaux athermanes [*voir* une Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur, au t. XIV (1869) du même Recueil, et un article du *Compte rendu*, t. LXIX, p. 329, 2 août 1869] ; les cristaux du sixième système sont donc, dans la théorie analytique de la chaleur, les seuls non-symétriques, les seuls qui ne paraissent pas devoir se comporter comme s'ils avaient trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, ou trois axes principaux de conductibilité, suivant l'expression de Duhamel ; pour ceux des cinq premiers systèmes, l'ellipsoïde des conductibilités linéaires n'est pas distinct de l'ellipsoïde principal, et la chaleur s'y répand en ligne droite tout autour d'un point chauffé.

[**] C'est ce que M. Sarrau a reconnu le premier, dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* (t. XIII, p. 37; 1868).

forces, exercées de molécule à molécule, qui constituent l'élasticité de la matière pondérable; mais elle est admissible dès que l'on regarde les actions dont il s'agit comme étant d'une tout autre nature et plutôt analogues aux forces chimiques ou atomiques. Toutefois il ne faudrait pas donner pour preuve de sa réalité la nécessité d'obtenir la surface d'onde de Fresnel, car tous les cristaux connus sont assez peu biréfringents pour qu'on puisse, avec une exactitude comparable à celle des expériences, leur appliquer les calculs de première approximation dont cette forme d'onde est une conséquence, quelle que soit la valeur de $\lambda + 2\mu$.

IX. — Je n'entrerai pas ici dans le détail des explications que contiennent les Mémoires cités. M. Sarrau est d'avis que ces explications sont toujours simples et qu'elles s'étendent à la totalité des phénomènes dont doit rendre compte une théorie mathématique de la lumière. Je me contenterai d'ajouter deux réflexions.

La première est relative à la clairvoyance de Fresnel, qui a bien pu se tromper, mais de manière que ses erreurs même, ou du moins ce qui paraît tel au point de vue de la théorie actuelle, soient en quelque sorte des pressentiments de la vérité : par exemple, Fresnel a reconnu [*] que l'examen des phénomènes de réflexion et de réfraction conduit à admettre l'égale élasticité de tous les éthers, et il a cherché à expliquer leurs différentes manières de se comporter en leur attribuant des densités différentes, dont la plus faible serait celle de l'éther libre. Or cette hypothèse, difficile à accepter quand on la prend dans son sens absolu, à cause de la difficulté d'admettre l'existence d'un corps dont l'élasticité ne soit pas fonction de sa densité, est néanmoins irréprochable dans ses conséquences analytiques, c'est-à-dire dans les équations qui en résultent pour représenter le mouvement lumineux. En effet, si l'on néglige la dispersion et la polarisation rotatoire, et que l'on se borne d'abord à l'étude d'un corps transparent isotrope, l'expression de chacun des déplacements u_1, v_1, w_1 de

[*] Dans son Mémoire *Sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée*, postérieur au Mémoire *Sur la double réfraction* et où l'illustre physicien a probablement consigné ses idées définitives.

la matière pondérable se réduit au produit d'une même constante positive A par le déplacement correspondant u, v, w de l'éther; par suite, l'inertie de la matière pondérable entraînée par l'éther, inertie qui s'ajoute, dans les équations, à celle de ce dernier, produit le même effet mécanique qu'une augmentation $\rho_1 A$ de la densité ρ de l'éther lui-même, et le mouvement vibratoire se propage comme si les molécules pondérables restaient fixes, mais avaient préalablement condensé de l'éther dans leur voisinage, de manière à y porter la densité de ce milieu de ρ à $\rho + \rho_1 A$. Peut-être Fresnel entrevoyait-il que la supposition d'une densité de l'éther plus grande à l'intérieur des corps que dans le vide n'était qu'une manière de tenir compte de la participation de la matière pondérable au mouvement. En suivant cet ordre d'idées, il aurait pu expliquer aisément la double réfraction, au moins dans les cristaux des cinq premiers systèmes, pour lesquels des considérations de symétrie prouvent l'existence de trois axes de coordonnées rectangulaires permettant de réduire u_1, v_1, w_1 aux formes simples Au, Bv, Cw; alors la densité de l'éther, au lieu d'être fictivement augmentée, par l'inertie de la matière pondérable, de la même quantité dans les trois équations de mouvement, serait portée de ρ à $\rho + \rho_1 A$ dans la première, à $\rho + \rho_1 B$ dans la deuxième, à $\rho + \rho_1 C$ dans la troisième; ces différences, suite naturelle de ce que les molécules intégrantes du corps considéré auraient des formes ne leur permettant pas de se laisser entraîner par l'éther avec la même facilité dans tous les sens, amèneraient les caractères observés qui distinguent la double réfraction de la réfraction simple. Une autre hypothèse de Fresnel, peu explicable dans son sens naturel, consiste à admettre qu'un corps animé d'un mouvement rapide de translation laisse immobile une portion de son éther de même densité que l'éther libre, tout en emportant avec lui le reste. Or une telle hypothèse se conçoit aisément, si l'excédant fictif d'éther dont il s'agit ne représente pas autre chose que le corps lui-même, en tant qu'il prend part au mouvement vibratoire. Il est vrai que toutes ces suppositions d'éthers de densités fictives inégales deviennent inutiles, mais elles montrent que la théorie nouvelle, loin d'être en contradiction avec les vraies idées de Fresnel, confirme plutôt les sublimes pressentiments au moyen desquels son génie intuitif devinait les faits, bien au delà de ce qui pouvait être clairement démontré

à une époque où la théorie de l'élasticité n'était pas encore constituée.

La seconde réflexion que je désire soumettre au lecteur a pour but de faire remarquer que la théorie nouvelle permet, sans compliquer les formules, de mettre en compte, dans les calculs, la partie principale de la dispersion, au moins quand le corps est presque isotrope symétrique (comme le sont tous les corps transparents), et que l'on étudie des radiations simples ne donnant naissance qu'à des déplacements vibratoires pendulaires d'une période déterminée τ. Alors la dérivée seconde, par rapport au temps, d'une fonction linéaire quelconque de ces déplacements ou de leurs dérivées, égale le produit du facteur constant $-\frac{4\pi^2}{\tau^2}$ par la fonction considérée, et il suffit de jeter les yeux sur la formule (6) du Mémoire intitulé : *Théorie nouvelle des ondes lumineuses*, pour reconnaître que les principaux des termes auxquels est due la dispersion ont simplement pour effet de diminuer chacun des deux coefficients d'élasticité de l'éther libre, λ et μ, d'une petite quantité proportionnelle à l'inverse de τ^2. Les équations du mouvement restent donc homogènes du second ordre, et l'on peut traiter, par exemple, le problème des intensités des lumières réfléchie et réfractée à la surface de séparation de deux milieux, aussi facilement en tenant compte de l'influence perturbatrice de la dispersion qu'en la négligeant.

X. — Tels sont, exposés sans calcul, les principes et quelques résultats de la théorie de la lumière que je regarde comme corrélative à celle de la chaleur contenue dans les *Recherches* précédentes. Il ne m'appartient pas de la comparer à d'autres théories intéressantes, dont on s'est servi pour expliquer un certain nombre de phénomènes, et dans l'exposition desquelles M. Briot et M. Sarrau notamment ont su déployer toute la puissance de l'Analyse. Ces théories, applicables principalement aux corps cristallisés, sont basées en grande partie sur l'hypothèse, faite par Cauchy, que l'éther vibre seul à l'intérieur de ces corps et s'y trouve périodiquement homogène, c'est-à-dire constitué différemment aux divers points de chaque molécule intégrante du cristal, mais pareillement aux points homologues de toutes les molécules. M. Sarrau surtout a montré, dans son second

Mémoire (*Journal de Mathématiques,* t. XIII, 1868), tout le parti qu'on pouvait tirer de cette idée, puisque, en supposant l'élasticité de l'éther constante aux divers points d'un cristal et la densité seule périodiquement variable, il a pu rendre compte, non-seulement de la dispersion et de la polarisation rotatoire à l'intérieur de ces corps, mais encore de la double réfraction, pour laquelle il est conduit à peu près, dans le cas où il existe trois plans rectangulaires de symétrie de contexture et où la biréfringence est faible, aux mêmes formules que moi. Il serait assurément injuste d'exiger des théories dont je parle, qui emploient la méthode de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles et à coefficients périodiques, la même simplicité que de la précédente; mais on doit leur demander d'expliquer, sans suppositions contradictoires, la totalité ou la presque totalité des phénomènes lumineux, car elles ne seront vraiment acceptables que le jour où l'on aura reconnu qu'elles régissent l'ensemble des faits compris dans leur domaine; or, on n'a pas encore obtenu par leur moyen, à ma connaissance du moins :

1° La loi très-simple sur la puissance réfractive et sur le pouvoir rotatoire des mélanges;

2° L'explication de deux faits consistant, le premier en ce que tous les cristaux, même ceux du sixième système, chez lesquels il n'y a aucun plan de symétrie de contexture, n'ont que deux axes optiques, et le second en ce que les cristaux des cinq premiers systèmes, y compris ceux du cinquième sur lesquels il a été fait des observations précises, obéissent aux lois de Fresnel ou se comportent comme s'ils avaient trois plans rectangulaires de symétrie de contexture;

3° L'explication de la rotation du plan de polarisation par le magnétisme;

4° Celle de la loi de Fresnel sur la vitesse de la lumière dans les corps en mouvement, en y substituant à la période réelle de vibration sa valeur apparente, conformément à ce qu'indiquent des observations de M. Mascart;

5° Les conditions aux surfaces limites dites de *continuité,* en tant que conciliables avec l'égalité des pressions exercées de part et d'autre de la surface de séparation de deux milieux; ou, si l'on admet, comme le fait M. Sarrau dans son second Mémoire, l'égale élasticité de tous

les éthers (ce qui rend évidentes ces conditions), la démonstration, par quelque analogie plausible, de la possibilité pour un milieu d'avoir une élasticité constante, quelle que soit sa densité;

6° Une explication claire de la dispersion dans le cas le plus simple, qui est celui d'un corps isotrope symétrique, comme le verre. On conçoit, quand il est question d'un cristal, c'est-à-dire d'un milieu divisé, par hypothèse, en cellules égales et pareillement orientées, que chaque déplacement u, v, w se règle de manière à se composer, aux divers points d'une cellule et à un instant quelconque, non-seulement de sa *valeur moyenne locale,* ou moyenne des valeurs qu'il acquiert dans toute l'étendue de la cellule, mais encore d'une autre partie, à valeur moyenne nulle, qui se reproduise périodiquement d'une cellule à la cellule contiguë, en vertu d'une extension bien naturelle, aux effets de causes périodiques dans l'espace, du principe de Laplace relatif aux effets de causes périodiques dans le temps : alors, si, dans les trois équations de mouvement, dont chaque terme est supposé le produit d'un coefficient périodique par une dérivée de u, v ou w, on substitue à ce coefficient et à la dérivée considérée leurs valeurs moyennes locales augmentées des parties variables, et qu'après avoir développé les résultats on prenne les moyennes des équations analogues relatives aux divers éléments de volume d'une cellule, les produits des parties variables des coefficients par celles des dérivées des déplacements qui sont affectées de la même périodicité n'en disparaîtront pas généralement; car la solidarité qui lie leurs deux facteurs rend en général ces produits plus souvent positifs que négatifs ou réciproquement. On obtiendra donc, entre les dérivées des parties moyennes des déplacements u, v, w, d'autres équations que celles qu'on aurait eues si l'on avait réduit de prime abord, dans celles du mouvement, les coefficients et les fonctions u, v, w à leurs valeurs moyennes locales. Mais il semble qu'il ne doit plus en être de même *quand le milieu est isotrope.* Dans ce cas, en effet, nulle périodicité régulière n'existe à l'intérieur du milieu, et il est invraisemblable qu'il s'établisse la moindre concordance entre les parties variables, distribuées sans ordre au-dessus et au-dessous des valeurs moyennes locales, soit, d'une part, des coefficients qui entrent dans les équations, soit, d'autre part, des dérivées partielles des déplacements. On ne voit donc pas de raison pour

que les produits respectifs de ces parties se trouvent, en moyenne, plutôt positifs que négatifs, et les équations que l'on obtient en prenant les moyennes des équations vraies de mouvement dans tout l'intérieur d'un petit volume ne doivent pas différer de celles qu'on aurait eues si l'on avait substitué simplement dans celles-ci, aux coefficients et à u, v, w, leurs valeurs moyennes locales. Ainsi l'hypothèse de la rapide variabilité des coefficients ne paraît pas conduire, dans le cas d'un corps isotrope, à d'autres conséquences que celle des coefficients constants : s'il en est ainsi, elle n'est pas propre à établir en particulier, comme il le faudrait pour expliquer la dispersion, que les valeurs moyennes locales des déplacements sont régies par des équations aux dérivées partielles du quatrième ordre en x, y, z et à coefficients constants, tandis que les déplacements eux-mêmes le seraient par des équations du second ordre à coefficients variables.

Il faut remarquer encore que la méthode même d'intégration, par laquelle on déduit d'équations linéaires du second ordre en u, v, w et à coefficients périodiques des équations d'ordre supérieur, à coefficients constants, dans lesquelles il ne reste plus d'autres fonctions que les valeurs moyennes locales de u, v, w, aurait besoin d'être examinée de plus près qu'on ne l'a fait jusqu'ici. Ce procédé constitue peut-être une des belles et des plus hardies conceptions de Cauchy; car, s'il est exact, il réalise la transformation la plus étonnante, ce me semble, qu'ait jamais opérée l'analyse mathématique; mais certaines difficultés, signalées par M. de Saint-Venant au n° 21 de l'Étude déjà citée, prouvent qu'il serait nécessaire d'établir, avant de l'employer, sa parfaite légitimité. Les géomètres accueilleront donc avec plaisir le Mémoire que M. Sarrau promet de publier prochainement et où il se propose de démontrer tout au moins, ce qui me paraît difficile, que cette méthode ne donne pas des résultats contradictoires, quand on l'applique au calcul des petits mouvements d'un corps isotrope et d'élasticité constante, mais de densité périodiquement variable, suivant qu'on laisse, dans les équations, la densité ρ en coefficient aux accélérations $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$, ou suivant qu'on divise préalablement par ρ.

Enfin, même après avoir prouvé, si c'est possible, l'exactitude de la méthode de Cauchy, il serait encore bien à désirer qu'on pût établir

les équations différentielles, d'ordre supérieur au second, qui régissent les valeurs moyennes locales de u, v, w, non-seulement dans la supposition d'ondes planes, à laquelle s'est borné jusqu'ici M. Sarrau, mais encore pour le cas plus général d'ondes ayant une courbure sensible, qu'il est souvent nécessaire de considérer.

Sur le calcul de la vitesse de la lumière dans les corps en mouvement [*].

Le résultat principal d'une analyse développée au § III d'une *Addition* à la *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1868) consiste en ce que les équations qui régissent un système d'ondes lumineuses propagées à travers un corps en mouvement peuvent se déduire de celles qui représentent un système d'ondes de même direction et de même période vibratoire dans ce corps supposé immobile, en substituant simplement à la vitesse de propagation ω, relative au cas du repos, celle ω' qui convient au cas du mouvement, et à la densité ρ_1 de la matière pondérable le produit $\rho_1\left(1-\frac{V'}{\omega'}\right)^2$, où V' désigne la vitesse translatoire du corps, estimée dans le sens suivant lequel progressent les ondes.

J'ai montré que ce principe conduit, pour le cas où le rapport de V' à ω' est une petite quantité, et où l'on peut négliger, vis-à-vis de l'unité, le produit de ce rapport par chacun des trois pouvoirs dispersif, biréfringent, rotatoire, à la formule de Fresnel

$$\omega' = \omega + \left(1 - \frac{1}{N^2}\right) V', \tag{1}$$

ordinairement suffisante, et dans laquelle N représente l'indice de réfraction du corps; mais certaines observations de M. Mascart ont atteint un tel degré de précision, qu'il devient nécessaire de reprendre les calculs en comptant les plus influents des termes ainsi négligés, c'est-à-dire (si l'on se borne au cas d'un milieu isotrope symétrique

[*] Note présentée à l'Académie des Sciences, le 24 juin 1872; *Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 1573.

comme le verre) ceux qui sont comparables au produit de V′ par le pouvoir dispersif.

D'après une expression de ω^2 donnée après les relations (6) du Mémoire intitulé : *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (*Journal de Mathématiques*, même t. XIII), on a

$$(2) \qquad \omega^2 = \frac{\mu}{\rho + \rho_1 A}\left(1 + \frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu}\frac{1}{\tau^2}\right),$$

μ et ρ désignant le coefficient d'élasticité et la densité de l'éther, A un coefficient positif et constant dépendant de la nature du corps transparent considéré, τ la durée de la vibration, enfin D une petite quantité, caractéristique du pouvoir dispersif, dont la partie principale est constante, mais qui égale plus exactement (*voir* § IV du même Mémoire) une série très-rapidement convergente ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2\omega^2$. Cette série, par la substitution de valeurs de plus en plus approchées de ω^2, tirées successivement de (2), prend la forme

$$(3) \qquad D = D_0 + \frac{D_1}{\tau^2} + \frac{D_2}{\tau^4} + \frac{D_3}{\tau^6} + \ldots.$$

Lorsque le corps est en mouvement, l'application du principe énoncé ci-dessus conduit à changer la formule (2) en celle-ci :

$$(4) \qquad \omega'^2 = \frac{\mu}{\rho + \rho_1\left(1 - \frac{V'}{\omega'}\right)^2 A}\left[1 + \frac{4D\pi^2}{\mu}\rho_1\left(1 - \frac{V'}{\omega'}\right)^2\frac{1}{\tau^2}\right];$$

quant à la série D, ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2\omega^2$, la substitution de ω' à ω n'y introduit que des variations négligeables, c'est-à-dire beaucoup plus petites que le produit de son terme principal et constant D_0 par le rapport de V′ à ω'. On peut lui conserver la valeur (3) et y substituer même, à l'inverse de τ, l'expression très-peu différente

$$(5) \qquad \frac{1}{T} = \left(1 - \frac{V'}{\omega'}\right)\frac{1}{\tau} = \frac{\omega' - V'}{\tau\omega'}.$$

Les formules (3) et (4) deviennent ainsi

$$(6)\quad \begin{cases} D = D_0 + \dfrac{D_1}{T^2} + \dfrac{D_2}{T^4} + \ldots, \\ \omega'^2 = \dfrac{\mu}{\rho + \rho_1 A}\left(1 + \dfrac{4D\pi^2\rho_1}{\mu}\dfrac{1}{T^2}\right)\left[1 - \dfrac{\rho_1 A}{\rho + \rho_1 A}\left(2\dfrac{V'}{\omega'} - \dfrac{V'^2}{\omega'^2}\right)\right]^{-1}. \end{cases}$$

La seconde équation (6) donne, à une deuxième approximation, c'est-à-dire en y négligeant des termes de l'ordre de V'^2,

$$(7)\qquad \omega' = \sqrt{\frac{\mu}{\rho + \rho_1 A}\left(1 + \frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu}\frac{1}{T^2}\right)} + \frac{\rho_1 A}{\rho + \rho_1 A}V'.$$

Le premier terme du second membre de l'expression (7) est la valeur de la vitesse avec laquelle se propageraient, à travers le corps supposé immobile, des ondes pour lesquelles la période de vibration, au lieu d'être τ, serait T : je le représenterai par $F\left(\frac{1}{T^2}\right)$. Cette valeur, en négligeant la dispersion, ou, ce qui revient au même, en y faisant T un peu grand, se réduit à $\sqrt{\frac{\mu}{\rho + \rho_1 A}}$, et son rapport à la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ de la lumière dans l'éther libre, rapport égal à $\sqrt{\frac{\rho}{\rho + \rho_1 A}}$, est l'inverse de l'indice N de réfraction du corps, abstraction faite de la dispersion. Il en résulte que la relation (7) peut s'écrire

$$(8)\qquad \omega' = F\left(\frac{1}{T^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)V'.$$

Il ne reste plus, pour la traduire en langage ordinaire, qu'à chercher ce que représente la quantité T définie par la formule (5). Concevons, pour cela, un observateur qui participerait au mouvement du corps transparent, et par rapport auquel les ondes seraient par suite animées d'une vitesse de propagation égale à $\omega' - V'$. Cet observateur verrait passer à côté de lui, dans l'unité de temps, un nombre d'ondes égal au quotient de $\omega' - V'$ par la longueur d'onde $\tau\omega'$, c'est-à-dire justement à l'inverse de T, et T représenterait pour lui la durée de la vibration.

La formule (8) équivaut donc à la loi suivante : *Lorsqu'un corps*

transparent, isotrope symétrique, se transporte dans l'espace avec une vitesse dont le rapport à celle de la lumière est très-petit et a son carré négligeable, la vitesse de propagation des ondes lumineuses qui le traversent est sensiblement la somme 1° *de la vitesse avec laquelle se propageraient, à travers le même corps supposé en repos, des ondes lumineuses ayant, pour un observateur placé sur le corps, la même période apparente de vibration que celles qu'on étudie, et* 2° *du produit de la vitesse translatoire du corps, estimée dans la direction suivant laquelle progressent les ondes, par l'excès, sur l'unité, du carré de l'inverse de son indice de réfraction relatif à des radiations d'une longueur d'onde assez grande pour que l'influence de la dispersion y soit insensible.*

Cette loi diffère de celle de Fresnel, exprimée par la formule (1), en ce que, dans la partie principale ω du second membre de celle-ci, la durée de la vibration est remplacée par sa valeur apparente T, ce qui augmente à fort peu près cette partie de $-\frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu\tau^2}V'$. D'autre part, M. Mascart a été conduit par ses observations à une formule pareille à l'équation (8), mais dans laquelle il désigne par N l'indice de réfraction relatif à des ondes de période τ ou T; ce qui revient à ajouter encore à l'expression de ω' la quantité $-\frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu\tau^2N^2}V'$, plus petite que le terme correctif précédent dans le rapport de N^2 à 1. Je ne sais si ces observations prouvent l'existence du second terme correctif, que ma théorie n'indique pas, aussi bien que celle du premier [*]. Si elles avaient atteint une précision suffisante pour cela, il faudrait en conclure, ce me semble, que les vitesses translatoires de l'éther traversé par un corps en mouvement ne sont pas entièrement négligeables, en comparaison de la vitesse de la lumière, ou encore que l'élasticité et la densité de cet éther diffèrent un peu de celles de l'éther libre; ce qui rendrait seulement très-approchées, et non exactes jusqu'au delà de

---

[*] Depuis que cet article a paru aux *Comptes rendus*, M. Mascart, avec qui j'ai eu l'honneur de m'entretenir du sujet qui s'y trouve traité, m'a déclaré qu'il n'y avait aucune contradiction entre la formule (8) ci-dessus et les résultats de ses expériences, vu que celles-ci prouvent seulement la nécessité d'introduire, dans l'expression de la vitesse ω', la période apparente T de vibration au lieu de la période réelle τ.

toute limite accessible à l'expérience, les hypothèses admises dans mon Mémoire de 1868, cité au commencement de cet article [*].

Sur le calcul des phénomènes lumineux produits à l'intérieur des milieux transparents animés d'une translation rapide, dans le cas où l'observateur participe lui-même à cette translation [**].

Au § III d'une Addition au Mémoire intitulé *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, p. 433; 1868), et dans une Note du 24 juin 1872, insérée au t. LXXIV des *Comptes rendus* (p. 1573), j'ai établi des formules qui représentent la propagation des ondes lumineuses dans l'éther traversé par un corps en mouvement; mais je rapportais les déplacements vibratoires u, v, w de l'éther et ceux u_1, v_1, w_1 de la matière pondérable à un système d'axes rectangulaires des x, y, z, fixes par rapport au milieu éthéré, de manière à obtenir les directions et les vitesses de propagation des rayons telles que les percevrait un observateur non entraîné avec le corps. Or, quand on étudie l'influence du mouvement de translation de la Terre sur des phénomènes lumineux produits à sa surface, l'observateur, le corps transparent et même, en général, la source de lumière

[*] Au § II du même Mémoire, j'ai donné, pour expliquer la rotation du plan de polarisation par le magnétisme, une théorie simple que je croyais être la première, et qui rend compte de toutes les lois expérimentales du phénomène. J'ai appris depuis que M. Charles Neumann, de Halle, s'était déjà occupé du même sujet dans sa thèse de doctorat soutenue le 29 mai 1858 : il y déduit, de plusieurs hypothèses et de calculs assez compliqués dont il ne donne pas le détail, des équations différentielles des mouvements de l'éther dans lesquelles les termes provenant de l'action magnétique reviendraient précisément à ceux que ma théorie introduit, s'ils s'y trouvaient différentiés deux fois de plus par rapport au temps. Cette différence est cause que le savant géomètre physicien obtient un pouvoir rotatoire indépendant de la longueur d'onde, abstraction faite du petit pouvoir dispersif ordinaire du corps, et non un pouvoir rotatoire qui soit sensiblement en raison inverse du carré de cette longueur d'onde, conformément à l'expérience. Les autres lois du phénomène s'appliqueraient d'ailleurs par sa théorie, antérieure à la mienne de dix ans.

[**] Note présentée à l'Académie des Sciences, le 26 mai 1873; *Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 1293.

n'ont aucun mouvement relatif, et possèdent, par rapport à l'éther, une vitesse commune, dont j'appellerai V_1, V_2, V_3 les composantes suivant les trois axes; il est alors plus avantageux de rapporter les déplacements à un système d'axes des x', y', z', parallèles à ceux des x, y, z, mais animés de ce mouvement, ou, ce qui revient au même, de supposer l'observateur, la source et le corps transparent en repos, tandis que l'éther serait emporté avec une vitesse égale et contraire $(-V_1, -V_2, -V_3)$. Si l'on admet que, pour $t = 0$, l'origine des coordonnées x', y', z' coïncide avec celle des coordonnées x, y, z, et si l'on observe que les composantes V_1, V_2, V_3 de la vitesse relative de translation peuvent être supposées constantes pendant un intervalle comparable à la durée d'un grand nombre de vibrations, on aura, entre ces coordonnées, les relations simples

$$(1) \qquad x = x' + V_1 t, \quad y = y' + V_2 t, \quad z = z' + V_3 t,$$

et les déplacements vibratoires u, v, w, u_1, v_1, w_1, fonctions de x, y, z, t, deviendront des fonctions de x', y', z', t', en accentuant provisoirement la variable $t' = t$. Leurs dérivées se transformeront, par suite, au moyen des formules symboliques

$$(2) \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx'}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{d}{dy'}, \quad \frac{d}{dz} = \frac{d}{dz'}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} - V_1 \frac{d}{dx'} - V_2 \frac{d}{dy'} - V_3 \frac{d}{dz'},$$

et la première des trois équations indéfinies du mouvement, établie au § III cité (formule 33),

$$(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u = \rho \frac{d^2 u}{dt^2} + \rho_1 \left(\frac{d}{dt} + V_1 \frac{d}{dx} + V_2 \frac{d}{dy} + V_3 \frac{d}{dz} \right)^2 u_1,$$

où λ, μ, ρ désignent les deux coefficients d'élasticité et la densité de l'éther, ρ_1 la densité de la matière pondérable, θ la dilatation cubique $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ de l'éther, Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, deviendra

$$(3) \quad (\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx'} + \mu \Delta_2 u = \rho \left(\frac{d}{dt} - V_1 \frac{d}{dx'} - V_2 \frac{d}{dy'} - V_3 \frac{d}{dz'} \right)^2 u + \rho_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2}.$$

Substituons, dans cette équation et dans les deux autres analogues,

les valeurs de u, v, w et par conséquent celles de u_1, v_1, w_1, qui correspondent à un système d'ondes planes, dont la normale fait avec les axes des angles ayant les cosinus m, n, p, et pour lesquelles j'appellerai T la période vibratoire apparente, c'est-à-dire l'intervalle de temps qui séparera les commencements de deux vibrations consécutives imprimées par l'éther à une molécule des corps transparents considérés. Ces valeurs seront les parties réelles de trois intégrales simples proportionnelles à l'exponentielle $e^{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{mx'+ny'+pz'}{\omega'}\right)\sqrt{-1}}$, ω' désignant la vitesse de propagation apparente ou par rapport à un observateur lié aux axes des x', y', z'. A cause de cette proportionnalité, on aura

$$(4)\qquad \frac{d}{dt} - V_1\frac{d}{dx'} - V_2\frac{d}{dy'} - V_3\frac{d}{dz'} = \left(1 + \frac{V_1 m + V_2 n + V_3 p}{\omega'}\right)\frac{d}{dt},$$

et, si l'on appelle V′ la composante $V_1 m + V_2 n + V_3 p$, suivant la normale aux ondes, de la vitesse translatoire, l'équation (3) pourra s'écrire

$$(5)\qquad (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx'} + \mu\Delta_2 u = \rho\left(1+\frac{V'}{\omega'}\right)^2\frac{d^2u}{dt^2} + \rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}.$$

Elle ne diffère de celle qu'on obtiendrait, si le corps était fixe, qu'en ce que la densité ρ de l'éther y est multipliée par l'expression $\left(1+\frac{V'}{\omega'}\right)^2$. Observons d'ailleurs : 1° que les conditions relatives aux surfaces de séparation de deux milieux, ou *conditions de continuité*, s'exprimeront de la même manière, ou seront analytiquement les mêmes, pour un système de corps contigus animés d'un mouvement commun et rapportés à des axes possédant ce mouvement, que pour le même système supposé en repos au sein de l'éther; 2° que, dans le cas ordinaire où la source lumineuse participe à la translation, la durée apparente de la vibration se confond avec sa durée réelle, et la formule (5), jointe à deux autres analogues, permettra d'énoncer la loi suivante :

Les phénomènes lumineux que perçoit un observateur entraîné, dans un mouvement commun de translation par rapport à l'éther, avec la source de lumière et avec les milieux interposés, ne diffèrent pas de ceux qu'il observerait en regardant la même source à travers les mêmes milieux transparents, si, la translation n'existant pas, la

densité de l'éther devenait, dans chaque milieu respectif et pour des ondes d'une direction déterminée, plus grande qu'elle n'est dans le rapport de l'unité au carré de la somme de l'unité et du quotient de la composante de la vitesse translatoire suivant la normale aux ondes par la vitesse de propagation de celles-ci à travers le milieu considéré.

En particulier, toutes les fois que la translation se fera parallèlement au plan des ondes, leur vitesse de propagation et le mode de polarisation des vibrations n'en seront nullement modifiés.

J'espère que cette méthode permettra de calculer, plus simplement que toute autre, les phénomènes qui se produiraient dans le cas où l'éther ne participerait pas sensiblement, tout près de la surface terrestre, au mouvement de la Terre, et de confirmer ou d'infirmer par suite cette hypothèse, au moyen de la comparaison des résultats théoriques auxquels elle conduira avec ceux de l'observation. L'expérience de M. Fizeau sur la propagation de la lumière à travers une colonne liquide en mouvement a bien prouvé que l'éther n'est pas entraîné d'une manière appréciable par un corps animé d'une certaine vitesse relative à la surface de notre globe, et bien que les ondes soient alors partiellement entraînées; mais il pourrait se faire que l'éther qui nous entoure possédât une partie plus ou moins grande de la vitesse même de translation de la Terre, soit à cause des dimensions de celle-ci, dimensions incomparablement plus considérables que celles des corps sur lesquels portent nos expériences et lui permettant d'agir incomparablement plus sur les couches d'éther qu'elle traverse, soit encore à cause d'un mouvement propre de translation, autour du Soleil, qui animerait les couches d'éther dans lesquelles nous nous trouvons, circonstance dont l'aberration des étoiles fixes ne paraît pas devoir dépendre.

Note sur la théorie des tourbillons liquides;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

Aux §§ XI et XII d'un Mémoire *Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides* (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XIII, 1868) j'ai obtenu les équations générales qui régissent l'écoulement bien continu d'un liquide dans un tuyau ou dans un canal à axe circulaire et de section constante, quand les vitesses se trouvent distribuées de la même manière sur toutes les sections normales. J'ai démontré en particulier que la pression p est alors la même aux points homologues de toutes ces sections, à part un terme proportionnel à leur inclinaison variable α sur le plan de l'une d'elles et à une constante c qui dépend du mode d'écoulement [*].

Le cas le plus simple, pour lequel la constante c est nulle, parce que la pression p doit redevenir la même lorsque α croît de 360 degrés, se présente quand le liquide est mû dans un espace annulaire complet, compris entre un cylindre plein vertical de rayon r_0, animé d'une vitesse de rotation donnée, et un cylindre creux conaxique, d'un rayon plus grand r_1, animé d'une vitesse de rotation également connue. Ce problème intéressant, que Newton le premier a essayé de traiter [**], revient, dans le cas plus particulier $r_1 = \infty$, à l'étude du tourbillon permanent qu'on produit en faisant tourner uniformément sur son axe un cylindre solide vertical immergé en partie dans une eau en repos.

Si le cylindre de rayon r_0 et aussi celui de rayon r_1 (quand il existe) plongent assez profondément pour que la dérivée $\frac{dv}{dz}$ de la vitesse dans le sens vertical (de bas en haut) soit beaucoup plus petite que sa dérivée $\frac{dv}{dr}$ dans le sens des rayons r, les filets fluides seront approximativement circulaires et conaxiques, et l'intégrale (36) (§ XI cité) de

[*] On remarquera que, dans le § XII du Mémoire cité, la constante c designe la dérivée $\frac{-dp}{d\alpha}$, et non, comme au § XI, le quotient de cette dérivée par le coefficient des frottements intérieurs.

[**] *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, IXe section, prop. LI.

l'équation du mouvement, intégrale qui équivaut, avec deux constantes arbitraires M, N, à $v = -\frac{c}{2} r \log \frac{r}{r_0} + Mr + \frac{N}{r}$, deviendra simplement $v = Mr + \frac{N}{r}$.

On déterminera M et N au moyen des deux conditions relatives aux parois et qui ont lieu, l'une pour $r = r_0$, l'autre pour $r = r_1$. Dans le cas, particulièrement intéressant, où $r_1 = \infty$, la condition concernant la paroi extérieure ou concave reviendra toujours à dire que la vitesse ne doit pas devenir infinie pour $r = \infty$, et l'on devra poser $M = 0$, ou $v = \frac{N}{r}$; d'où la loi suivante, indiquée par Léonard de Vinci, observée par Venturi [*] et démontrée, tout autrement que ci-dessus, par M. de Saint-Venant [**], qui a repris le calcul de Newton en évitant deux erreurs signalées, l'une par Jean Bernoulli, l'autre par d'Alembert : *La vitesse, dans les tourbillons, est en raison inverse de la distance à l'axe.*

L'expression (41) (§ XI) de la pression p, si l'on y fait $c = 0$ et qu'on l'égale à celle de l'atmosphère, donne l'équation de la surface libre

$$z = \text{const} + \frac{1}{g}\int_{r_0}^{r} \frac{V^2}{r}\,dr = \text{const} + \frac{N^2}{2g}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

Le coefficient angulaire $\frac{dz}{dr}$ de la tangente à un méridien de cette surface vaut $\frac{v^2}{gr}$ et décroît sans cesse quand r grandit, du moins lorsqu'on a $r_1 = \infty$ ou $M = 0$. *La surface libre du tourbillon est*, par conséquent, *un entonnoir dont le demi-méridien tourne sa concavité vers en bas*, à l'inverse de ce qui arrive pour une masse liquide animée d'un simple mouvement de rotation, ou dans laquelle la vitesse v est proportionnelle à r, et dont la surface est un paraboloïde de révolution concave vers en haut.

---

[*] *Essai sur les Ouvrages physico-mathématiques de Léonard de Vinci, lu par Venturi*, en 1797, *à l'Institut*, fragm. 10e et Observations à la suite, ou encore *Recherches sur la communication latérale du mouvement dans les fluides*, prop. XI.

[**] *Mémoire sur l'Hydrodynamique des cours d'eau* (*Comptes rendus*, t. LXXIV, 26 février 1872), note au bas de la quatrième page.

Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la Terre;

PAR M. YVON VILLARCEAU.

Nous avons publié, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2e série, t. XII, 1867), un premier théorème sur les attractions locales, qui établit une relation entre les effets de ces attractions sur les longitudes et les azimuts. Deux applications de ce théorème ont été, l'une simplement indiquée, l'autre effectivement réalisée. On a vu comment il permet d'établir des équations de condition propres à la détermination des corrections des éléments du calcul géodésique, équations qui doivent être vérifiées, *quelles que soient les attractions locales*. Enfin on a fait voir avec quelle facilité peut être contrôlée l'exactitude des chaînes de triangles orientées suivant les méridiens ou les parallèles; ce contrôle n'exige pour ainsi dire aucun calcul. Une application numérique a été faite à la partie de la méridienne de France qui s'étend de Paris à Carcassonne, et aux deux portions occidentale et orientale du parallèle de Paris : il s'est trouvé qu'une seule de ces diverses chaînes de triangles, la chaîne de Paris à Strasbourg, ne présente aucune erreur inadmissible, bien que la différence entre les longitudes astronomique et géodésique s'élève à 8″,1 pour Strasbourg. L'absence de mesures astronomiques d'azimuts en beaucoup de stations a empêché d'étendre ce mode de contrôle à d'autres chaînes principales de notre réseau trigonométrique.

Depuis lors, nous avons fait connaître deux autres théorèmes sur les attractions locales, où figurent les latitudes combinées soit avec les longitudes, soit avec les azimuts, soit enfin avec ces deux éléments réunis : ces nouveaux théorèmes, indépendamment d'une équation de condition entre les résultats astronomiques et géodésiques propre

à leur servir de contrôle, offrent deux solutions distinctes d'un problème qu'on n'avait pas même abordé en Géodésie, celui de la détermination des surfaces de niveau ou de la *vraie* figure de la Terre. En effet, on s'était borné jusque-là à rechercher les dimensions d'un ellipsoïde de révolution ou même d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, qui fût de nature à établir le plus grand accord possible entre les résultats des mesures astronomiques et ceux des calculs géodésiques, laissant aux attractions locales et aux erreurs des opérations à rendre compte des discordances persistantes. On n'avait pas songé à utiliser les effets des attractions locales pour évaluer les quantités dont la surface de niveau des mers, prolongée idéalement au travers des continents, peut s'écarter de celle du sphéroïde regardé comme le mieux déterminé. A notre sens, ce sphéroïde ne doit être considéré que comme une surface de comparaison, facilitant la discussion de la figure des surfaces de niveau. On remarquera sans doute que le plus ou moins grand degré d'exactitude des éléments géométriques du sphéroïde de comparaison sont sans influence sensible sur la détermination de la figure des surfaces de niveau : les relations entre ces surfaces et celles du sphéroïde changent en même temps que les éléments du sphéroïde, sans que néanmoins il en résulte de modification dans la figure des surfaces de niveau.

Il nous paraît nécessaire de prévenir une objection à notre manière d'envisager le problème de la vraie figure de la Terre. Pourquoi, dira-t-on, ne pas faire intervenir la mesure de la longueur du pendule aux stations astronomiques? Voici notre réponse. Supposons que l'on se propose de déterminer la figure de la Terre en faisant concourir au résultat les données de l'Astronomie, celles de la Géodésie, et les observations de la longueur du pendule. On établira les relations qui lient les données et les diverses inconnues de ce problème complexe, et l'on procédera à l'élimination successive des inconnues. Or parmi ces dernières figureront les trois composantes des attractions locales, et l'on reconnaîtra que, s'il existe deux rapports bien déterminés entre deux de ces composantes et leurs effets sur les latitudes et longitudes, ces composantes ne figurent pas explicitement dans les relations purement géométriques que fournissent les données de l'Astronomie et de la Géodésie. Dès lors, il est clair que l'élimination des trois com-

posantes se trouvera réalisée par la simple division du problème en deux autres, l'un consistant à déterminer la figure de la Terre au moyen des données géométriques que fournissent l'Astronomie et la Géodésie, et qui suffisent à cette détermination, l'autre dont l'objet est la distribution des densités dans la masse terrestre. La solution du premier problème doit donc être obtenue indépendamment de celle du second, au moins dans une première approximation [*].

Nous regretterions d'insister sur des considérations aussi élémentaires, si des hommes de science, dominés par les souvenirs de mémorables expéditions, n'avaient, à diverses reprises, émis l'opinion que les observations du pendule doivent être utilisées dans l'étude de la figure de la Terre.

La longue interruption des travaux d'Astronomie géodésique entrepris par l'Observatoire de Paris, interruption qui remonte à 1866, nous a laissé le loisir d'examiner le problème de la figure de la Terre sous différentes faces, et d'en présenter plusieurs solutions; il nous a été possible de fixer nos idées sur le choix des méthodes les plus propres à atteindre le but : dès lors, il pourrait sembler utile de nous borner à exposer les principes de celles auxquelles nous donnons la préférence. Nous croyons néanmoins devoir reproduire ici les divers Mémoires que nous avons publiés sur ce sujet dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences;* le lecteur pourra apprécier

[*] On est obligé, dans une première approximation, de négliger le défaut de parallélisme exact des directions des verticales menées par différents points d'une droite normale à la surface de niveau que l'on considère, et qui est produit par le défaut de parallélisme des surfaces de niveau que rencontre cette normale. On n'aurait à redouter aucune erreur de ce côté, si toutes les stations astronomiques étaient établies sur une même surface de niveau. En négligeant la différence des directions de la pesanteur à l'altitude de la station et au point correspondant du niveau de la mer, on commet une erreur du même ordre qu'en employant, dans le calcul des coordonnées géodésiques, les projections des distances des stations sur la surface de niveau des mers, au lieu d'employer les projections des mêmes distances sur la surface de l'ellipsoïde de comparaison. Les quantités négligées de cette manière sont d'un ordre supérieur, et il n'est possible d'y avoir égard qu'après avoir obtenu une solution approchée du problème.

les motifs de cette préférence. D'un autre côté, il ne sera peut-être pas sans intérêt de suivre la filiation des idées qui nous a conduit au résultat cherché.

En reproduisant les Mémoires dont il s'agit, nous ne nous permettrons d'autres modifications que celles de leurs titres. S'il nous arrive d'avoir à présenter quelques remarques sur des points déterminés de ces Mémoires, nous le ferons, dans des notes qui seront distinguées de celles faisant partie primitivement des mêmes Mémoires, en les faisant précéder des lettres *P. S.*

Un travail présenté sous une telle forme ne peut évidemment être jugé qu'après une lecture de son ensemble; aussi ferons-nous dans ce sens un appel à la patience du lecteur.

Second théorème sur les attractions locales et première détermination de la vraie figure de la Terre, fondée sur la comparaison des nivellements géodésiques et géométriques.

(*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome LXVII, séance du 28 décembre 1868.)

L'Association géodésique internationale pour la mesure des degrés en Europe se préoccupe vivement des moyens de tenir compte de l'effet des attractions locales, dans la détermination de la figure de la Terre. Cette question a été agitée lors de la réunion triennale tenue à Berlin en 1867, et la Commission chargée de l'examen des divers moyens proposés s'est déjà prononcée contre le mode d'évaluation qui consiste à calculer les attractions dues au relief du terrain, au moyen d'une valeur approchée de sa densité [*]. Les membres de ladite

[*] *P. S.* La Commission s'est occupée tout particulièrement de la question : s'il conviendrait d'entreprendre dans quelques points astronomiques principaux, ou même dans tous, des recherches semblables à celles qui ont été entreprises dans plusieurs points astronomiques de l'arc mesuré en Angleterre, où l'on a tenu compte des déviations locales *a priori*, en se fondant sur le relief et la densité du sol. La Commission ne croit pas pouvoir recommander ce procédé.... (*Comptes rendus de la Conférence géodésique internationale...*, réunie à Berlin du 30 septembre au 7 octobre 1867, p. 85 et 86.)

Commission se sont montrés favorables à l'emploi de théorèmes généraux sur les effets des attractions locales, théorèmes annoncés par l'un d'eux, M. Schering, mais non encore publiés [*]. Constatons, en passant, que nous avions nous-même donné la préférence à ce mode d'investigation, en présentant à l'Académie, en 1866, un théorème dont le théorème de Laplace est un cas particulier. L'un de ceux que M. Schering a découverts est également une généralisation du théorème de Laplace, et son savant auteur nous fait espérer une prochaine publication, dans laquelle il fera connaître en quoi son résultat diffère du mien [**]. J'aurais pu, dès 1866, indiquer un nouveau théorème, et je ne l'ai pas fait, parce que la possibilité de son application me paraissait encore éloignée. L'Académie voudra bien me permettre de lui présenter dès à présent un résultat dont la communication n'offrirait peut-être plus d'intérêt, si j'attendais que M. Schering eût fait connaître les nouveaux théorèmes qu'il annonce.

Considérons le sphéroïde défini, sur la surface duquel on fixe les positions géodésiques des sommets des triangles d'un réseau trigono-

---

[*] *P. S.* Nous extrayons du même Recueil, p. 86, les lignes suivantes :

« M. Schering croit pouvoir insister particulièrement sur ces théorèmes (concernant les attractions locales), parce qu'ils lui semblent ajouter de la force aux autres raisons qui militent pour l'importance de la détermination, au même endroit, de toutes les trois coordonnées astronomiques, azimuts, latitudes et longitudes, ainsi que pour l'utilité d'une distribution uniforme des stations astronomiques sur tout le terrain mesuré trigonométriquement. »

» La Commission a accueilli avec reconnaissance ces Communications de M. Schering, et elle croit y voir un nouveau motif pour le principe établi déjà, il y a trois ans, de faire les trois déterminations astronomiques dans le plus grand nombre possible de points, *uniformément distribués;* mais la Commission a dû se refuser à discuter ce sujet de plus près, parce que les théorèmes dont M. Schering a parlé *n'ont pas encore été publiés*. Cependant la Commission a cru, dans l'intérêt de la cause, devoir prier M. Schering de hâter cette publication autant que possible, et elle espère que la Conférence se joindra à cette résolution de la Commission. »

[**] *P. S.* L'Association géodésique internationale m'a fait l'honneur d'insérer, dans son *General Bericht* pour 1866, plusieurs de mes Mémoires sur la Géodesie et, entre autres, le premier théorème sur les attractions locales; mais ce théorème n'a pas été mentionné dans la réunion de la Commission chargée, en 1867, d'examiner la question des attractions locales. Cependant il y avait quelque intérêt à comparer deux

métrique, et la normale menée par un point de sa surface; par le même point, menons une parallèle à l'axe du monde (côté boréal) : le méridien géodésique du lieu est le plan mené par ces deux droites; la colatitude géodésique est l'angle de ces mêmes droites, et la longitude géodésique l'angle formé par le méridien géodésique et un premier méridien donné : telles sont les définitions.

Par un point de station M, pris pour centre d'une sphère, menons trois droites : l'une normale au sphéroïde, la deuxième dans la direction d'un signal B, et la troisième dans la direction du pôle boréal; les trois plans menés par ces droites détermineront un triangle sphérique. Soient A, B, C les trois angles de ce triangle, répondant respectivement aux points où les trois droites percent la sphère; a, b, c les trois côtés opposés : ces côtés seront respectivement égaux à la distance polaire du signal B, à la colatitude géodésique du lieu M et à la distance angulaire de la droite MB à la normale menée par le point M. Dans ce triangle sphérique, on aura la relation

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \tag{1}$$

---

théorèmes que leurs auteurs considèrent comme des extensions du théorème de Laplace. Ce *desideratum* a été signalé au général Bayer, président de la Conférence, et j'ai reçu à cette occasion les explications suivantes de M. Schering :

« ... Je m'empresse de vous assurer que ce n'est pas par oubli ou par ignorance que, dans mon annonce de deux théorèmes géodésiques, je n'ai pas mentionné vos ..... travaux sur cette profonde théorie : c'est seulement à cause de l'impossibilité où je me trouvais de marquer, *sans entrer en matière*, la différence qui existe entre l'étendue de votre théorème et le mien, qui sont tous deux des généralisations du théorème de Laplace....

» ... J'espère trouver bientôt le temps pour la publication de mes autres recherches géodésiques, et je ne doute pas que vous ne soyez bien satisfait de la manière dont je témoignerai de ma vive estime pour les grands progrès tout récents et bien connus dont cette science vous est redevable....

» ... L'intérêt commun pour le progrès des sciences vous fera pardonner si mon peu d'usage de m'exprimer en français m'empêche de vous dire, aussi bien que je le désire, combien j'estime votre sagacité bien nécessaire pour appliquer tous les secours que la science peut offrir à la détermination de la surface géodésique, si irrégulière, et combien je me sens obligé par la bienveillance avec laquelle vous traitez la discussion d'un cas concernant l'histoire de la science. »

Remplaçons maintenant, dans ce triangle, la direction de la normale au sphéroïde par la vraie direction de la verticale, résultant des attractions locales et autres, en conservant les directions qui aboutissent aux points B et C, et désignons par A′, B′, C′, a', b', c' les angles et les côtés homologues du nouveau triangle : les deux triangles n'auront de commun que les deux côtés a et a'. Si nous différentions la formule précédente, en y supposant a constant, nous aurons une relation entre les différentielles des quantités homologues dans les deux triangles. Effectuant la différentiation et les réductions qui résultent des relations entre les éléments du triangle, puis remplaçant les différentielles par les différences finies, on trouve

$$(2) \qquad \delta c = \cos A\, \delta b + \sin A \sin b\, \delta C.$$

Ici et dans tout ce qui va suivre, nous négligeons les quantités du second ordre.

Pour nous conformer aux usages géodésiques, nous remplacerons l'azimut A par son supplément $180^\circ - Z$; Z désignant l'azimut de B compté du sud vers l'ouest. Désignons par z la distance angulaire c de B à la normale, et z' la distance zénithale vraie du même point B; nous aurons $\delta c = z' - z$. D'autre part, L désignant la latitude géodésique du point M, et L′ sa latitude vraie, nous avons $b = 90^\circ - L$, $b' = 90^\circ - L'$; d'où $\delta b = -(L' - L)$. Enfin, désignant par $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ les longitudes géodésique et astronomique de M, comptées dans le sens de l'est à l'ouest, on a $C + \mathfrak{L} = C' + \mathfrak{L}'$; d'où $\delta C = -(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L})$. Au moyen de ces diverses valeurs, l'équation (2) devient

$$(3) \qquad z' - z = \cos Z (L' - L) - \sin Z \cos L (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}).$$

Cette expression peut être mise sous une autre forme. En effet, si nous différentions l'équation qui lie l'angle A aux côtés a et b et à l'angle C, en supposant toujours a constant, on trouve

$$(4) \qquad \sin c\, \delta A + \cos c \sin A\, \delta b + \sin a \cos B\, \delta C = 0,$$

équation équivalente à celle d'où nous avons déduit notre premier théorème sur les attractions locales. Éliminons δC entre cette équa-

tion et l'équation (2), il viendra

$$\cos B\,\delta c = -\sin C \sin b\,\delta A - \cos C\,\delta b.$$

En ayant égard à ce que $\delta A = -(Z' - Z)$, et aux valeurs ci-dessus de b, c et δb, on trouve finalement

$$(5) \qquad \cos B\,(z' - z) = \sin C \cos L\,(Z' - Z) + \cos C\,(L' - L) \quad [*].$$

Par cette transformation, on a substitué les azimuts aux longitudes.

Les relations (3) ou (5) constituent le nouveau théorème; il s'agit d'en préciser la signification : c'est ce que nous allons faire en montrant comment on peut l'appliquer.

Concevons qu'au moyen du plus grand nombre possible de comparaisons entre les coordonnées astronomiques et géodésiques, et faisant l'usage le plus convenable de théorèmes sur les attractions locales, on soit parvenu à fixer les éléments du sphéroïde, de manière à laisser subsister entre les résultats astronomiques et géodésiques les moindres différences, on n'aura pas, pour cela, résolu le problème de la détermination de la figure de la Terre. Les résultats du calcul feront connaître, il est vrai, les effets des attractions locales sur les longitudes et latitudes; mais il restera à mesurer leurs effets sur les altitudes. La surface que l'on aura obtenue n'est, à proprement parler, qu'une surface de comparaison, qui se confondrait avec la surface de niveau des mers, prolongée au travers des continents, s'il n'existait pas d'attractions locales; mais, à cause de ces attractions, les deux surfaces ne se confondent pas : or, si l'on peut parvenir à déterminer les distances qui séparent ces surfaces dans le sens des normales à l'une d'entre elles, on aura par le fait même déterminé la figure de l'autre. Voici comment l'emploi du nouveau théorème semble permettre d'atteindre ce résultat.

---

[*] Le facteur $\cos B$ peut introduire dans la valeur de $(z' - z)$ une indétermination qu'il conviendrait d'éviter. Or $\cos B$ s'annule pour les stations équatoriales, si le signal B est observé dans une direction perpendiculaire au méridien : il faudrait donc éviter, dans le voisinage de l'équateur, de suivre une ligne de nivellement qui s'écarte trop de la direction méridienne.

Les valeurs de $(L' - L)$ et $(\mathcal{L}' - \mathcal{L})$ ou $(Z' - Z)$, relatives au point M, étant censées connues par la détermination des éléments du sphéroïde de comparaison, et la distance zénithale vraie z' obtenue directement par l'observation, l'équation (3), ou l'équation (5) suivant les cas, fera connaître, pour le point M et le signal B, la valeur de z. Maintenant imaginons que les divers points du réseau aient été rattachés par un nivellement géométrique étendu jusqu'à l'Océan; on connaîtra les cotes absolues de tous les sommets des triangles, c'est-à-dire leurs altitudes au-dessus de la surface de niveau de l'Océan prolongée.

Soit h' l'altitude ainsi définie du point B; soient, d'autre part, h_0 l'altitude du point M au-dessus de la surface du sphéroïde pris pour surface de comparaison; h l'altitude du point B rapportée à la même surface : connaissant les coordonnées géodésiques des points M et B, on obtiendra, par la simple application des méthodes de la Géométrie analytique, la différence des altitudes h et h_0, ou la valeur de h si h_0 est connu [*]. Il suffira d'effectuer le même calcul sur les divers côtés du réseau, pour obtenir de proche en proche les altitudes des divers sommets, en fonction de l'altitude h_0 de l'un d'entre eux, qui reste indéterminée. On aura ainsi les diverses valeurs de $h' - h$ en fonction de l'indéterminée h_0, et celle-ci pourra s'obtenir en posant une condition telle que serait, par exemple, celle du minimum de la somme $\Sigma(h' - h)^2$. Dès lors, chaque valeur de $h' - h$ étant connue, cette valeur prise en signe contraire ou celle de $h - h'$ exprimera l'ordonnée de la surface de niveau par rapport à la surface de comparaison en

---

[*] On aperçoit aisément que la solution de cette question est fournie précisément par les formules du nivellement géodésique, et que, à part les précautions à prendre relativement aux réfractions, il suffira d'introduire dans ces formules l'angle z à la place de l'angle z' observé, ou bien d'employer l'angle z' corrigé de la quantité $-(z' - z)$, que l'on tire de l'équation (5). De cette manière, le problème de la détermination des cotes de la surface de niveau rapportées à la surface de comparaison est résolu par la comparaison des résultats obtenus dans les nivellements géodésique et géométrique, le premier étant corrigé des effets des attractions locales. Il va sans dire que la mesure de la différence de niveau des points M et B par rapport à la surface de comparaison nécessitera, à cause des réfractions, l'observation, à la station B, de la distance zénithale du point M, et que cette distance zénithale devra recevoir la correction $-(z' - z)$ dépendant des attractions locales en ce même point B.

chaque point B, et le problème de la détermination de la figure de la Terre sera résolu [*].

Nous devons prévenir une objection qui se rapporte à l'introduction de l'inconnue h_0. Cette nouvelle constante ne modifie-t-elle pas les éléments du sphéroïde de comparaison? Il est facile de reconnaître que cela n'a pas lieu; car on ignore absolument l'altitude d'un point quelconque de la surface des mers par rapport au sphéroïde de comparaison, et la surface de niveau ne peut être complétement déterminée, si l'on ne fixe pas l'altitude de l'un de ses points par rapport à la surface du sphéroïde.

Examinons les difficultés que peut présenter l'application de cette méthode. Du côté des nivellements géométriques, il n'en existe pas dont on ne soit parvenu à triompher; les grandes opérations effectuées depuis quelques années, tant en France qu'à l'étranger, ont donné les résultats les plus satisfaisants. Nos voisins de la Confédération helvétique n'ayant pas été arrêtés par les difficultés que présente chez eux la configuration du sol, on peut admettre que le nivellement géométrique sera exécutable partout où il sera nécessaire.

Le principal obstacle semblerait provenir de la difficulté d'obtenir de bonnes mesures des distances zénithales des objets terrestres : l'exacte évaluation des réfractions rencontre, en effet, des obstacles considérables. Les discordances qui se sont produites dans les nivellements géodésiques, à l'époque de Delambre et longtemps encore

---

[*] On peut concevoir une autre solution du problème : bornons-nous à en indiquer le principe. Les différences $(L' - L)$, $(\mathcal{L}' - \mathcal{L})$ ou $(Z' - Z)$ étant censées connues en chaque point du sphéroïde de comparaison, la direction de la verticale vraie en chacun de ces points se trouvera déterminée. On aura donc une suite de normales à une même surface de niveau, normales dont la position dans l'espace sera complétement fixée : alors le problème consiste à mener, par un point donné, une surface qui soit perpendiculaire à ces normales. Ce problème de Géométrie a été l'objet des recherches de notre savant confrère M. Bertrand, qui a fait connaître une équation de condition entre les données de la question. Cette équation doit offrir un moyen de contrôler l'exactitude des observations; car la surface de niveau n'est point une surface prise au hasard, mais une des réalités que nous offre la nature : on peut donc s'attendre qu'elle sera vérifiée, aux erreurs près des observations.

P. S. La solution dont il s'agit fait l'objet de deux Mémoires qui viennent après celui-ci.

après lui, tiennent à l'emploi d'un certain coefficient à appliquer à l'angle au centre, pour en déduire la réfraction, coefficient que l'on faisait varier suivant les saisons, du jour à la nuit, sans règle bien précise. On a reconnu ensuite qu'il fallait abandonner l'emploi d'un coefficient impossible à déterminer autrement que par les observations elles-mêmes; alors on a conseillé la méthode des distances zénithales réciproques, qui semblait devoir éliminer les effets de la réfraction. Cette méthode n'a cependant pas atteint son but; la théorie indiquait d'ailleurs son insuffisance. Parmi les tentatives faites pour triompher de ces difficultés, il faut citer la belle opération exécutée par les astronomes de Pulkowa, et sous la direction de W. Struve, pour déterminer la différence de niveau entre la mer Noire et la mer Caspienne. Qu'on me permette ici de citer mes propres recherches sur cette matière difficile.

En 1860, j'ai présenté au Bureau des Longitudes [*] le résultat de recherches théoriques sur les réfractions terrestres : j'avais pris pour base l'emploi d'une expression de la densité de l'air, mise sous la forme d'un polynôme ordonné suivant les puissances des hauteurs et limité au terme du deuxième degré inclusivement, polynôme dont les coefficients restaient à déterminer par l'observation; les conditions de l'observation étaient celles de la méthode des distances zénithales réciproques, complétées par l'observation du baromètre et du thermomètre aux deux stations. Cette méthode n'a reçu chez nous aucune application; mais la même méthode a été appliquée, en 1864, par M. Ibañez, Membre de l'Académie de Madrid, qui l'avait imaginée de son côté (voir *Estudios sobre nivelacion geodesica*, par don Carlos Ibañez é Ibañez. Madrid, 1864). Le succès obtenu par M. Ibañez permet d'augurer favorablement de l'emploi de la nouvelle méthode.

Voici, ce nous semble, le principal obstacle à l'application que nous venons de présenter du nouveau théorème. Par l'exposé qui précède, on a vu que l'altitude h d'un point B de la ligne de nivellement exige que l'on connaisse les variations $(L' - L)$ et $(\mathcal{L}' - \mathcal{L})$ ou $(Z' - Z)$, produites par les attractions locales sur les coordonnées ou azimuts de la station d'où le point B a été observé. Le point B devient, à son

[*] Séances des 12 et 19 décembre.

tour, le lieu de station d'où un troisième point doit être également observé, et ainsi de suite. Il résulte de là que les perturbations dues aux attractions locales doivent être fournies par des observations astronomiques faites en chaque station de la ligne de nivellement. Il y a là un obstacle matériel qui n'est peut-être pas tout à fait insurmontable. On a vu, en effet, que les azimuts peuvent, dans le problème actuel, remplacer les longitudes; la difficulté se réduirait donc à l'observation de la latitude et de l'azimut en chaque station. Or la précision du travail pourrait être limitée au degré strictement nécessaire à la résolution du problème. Ici nous touchons de près aux projets de l'Association géodésique internationale; car on y a proposé de faire au sommet de tous les triangles une mesure de la latitude.

Enfin nous devons faire remarquer que, si les stations astronomiques sont convenablement espacées, il se pourra que, dans certaines régions au moins, les variations dues aux attractions locales se prêtent à une interpolation qui dispenserait d'effectuer les opérations astronomiques aux stations intermédiaires; celles-ci ne deviendraient nécessaires que dans les régions pour lesquelles l'interpolation serait reconnue impraticable.

Sans rien vouloir préjuger actuellement des applications futures du nouveau théorème, nous considérons celle que nous venons d'indiquer comme très-propre à fixer les idées sur la signification géométrique de ce théorème, et les conséquences que l'on peut en déduire pour faciliter la solution du problème de la figure de la Terre. Nous aurons d'ailleurs atteint un but utile, si nous parvenons, par la publication du présent Mémoire, à provoquer des recherches dans une direction que l'on n'avait pas songé à suivre jusqu'ici [*].

---

[*] *P. S.* Au sujet du Mémoire qu'on vient de lire, nous avons reçu de M. Peters l'appréciation suivante, qu'on nous permettra de reproduire ici :

« J'ai lu avec le plus haut intérêt votre Mémoire sur les attractions locales, dans les *Comptes rendus* du 28 décembre 1868. Votre exposition claire et achevée d'une méthode entièrement nouvelle pour déterminer la *vraie* surface de la Terre appartient sans doute aux œuvres les plus importantes dans le ressort de la Géodésie, et il serait à désirer que vous fissiez valoir vos idées à l'assemblée prochaine de l'Association géodésique, à Vienne.

» En attendant, je me permettrai de publier dans les *Astronomische Nachrichten* un extrait de votre Lettre, en tant qu'elle expose votre méthode. »

La réunion dont parle M. Peters devait avoir lieu en septembre 1870, et nous avions

Troisième théorème sur les attractions locales et seconde détermination de la VRAIE *figure de la Terre obtenue sans le concours des nivellements proprement dits.*

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, p. 736, séance du 2 octobre 1871.)

Dans une Communication sur les attractions locales, que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie, le 28 décembre 1868, j'ai établi la distinction entre les deux espèces de nivellements *géodésique* et *géométrique*, et fait voir que leur simple comparaison suffit pour déterminer la figure de la surface de niveau, lorsqu'on applique au nivellement géodésique une correction qu'on avait négligée jusqu'alors et qui repose sur le second théorème concernant les attractions locales.

Après avoir exposé cette solution, j'ajoutais, dans une Note que je demande à l'Académie la permission de reproduire :

« On peut concevoir une autre solution du problème : bornons-nous à en indiquer le principe. Les différences $(L' - L)$, $(\mathcal{L}' - \mathcal{L})$ ou $(Z' - Z)$ [*] étant censées connues en chaque point du sphéroïde de comparaison, la direction de la verticale *vraie* en chacun de ces points se trouvera déterminée. On aura donc une suite de normales à une même surface de niveau, normales dont la position dans l'espace sera complétement fixée; alors le problème consiste à mener, par un point donné, une surface qui soit perpendiculaire à ces normales. Ce problème de Géométrie a été l'objet des recherches de notre savant confrère M. Bertrand, qui a fait connaître une équation de condition entre les données de la question. Cette équation doit offrir un moyen de contrôler l'exactitude des observations; car la surface de niveau n'est point une surface prise au hasard, mais une des réalités que nous offre la nature [**] : on peut donc s'attendre qu'elle sera vérifiée, aux erreurs près des observations. »

---

reçu du général Bayer l'invitation d'y assister. Les événements militaires ont empêché cette réunion d'avoir lieu et l'ont fait ajourner au mois de septembre 1871; mais, cette fois, nous n'avons pas reçu d'invitation, et d'ailleurs la France n'a envoyé aucun délégué pour la représenter. Dans la session de 1871, les questions relatives aux attractions locales n'ont été l'objet d'aucune communication. M. Schering, qui n'a pas figuré parmi les délégués cette année-là, ne paraît pas avoir encore publié les nouveaux théorèmes qu'il annonçait en 1867.

[*] Différences entre les résultats astronomiques et géodésiques, et relatifs aux latitudes, longitudes ou azimuts.

[**] Pour être plus correct, j'aurais dû dire : « Car le système de normales à la surface de niveau n'est pas un système pris au hasard, mais, etc. ».

Aujourd'hui je me propose de développer cette autre solution. Je n'aborderai pas la question générale que notre confrère M. Bertrand a traitée; je me bornerai au cas particulier à la Géodésie. Or la solution se trouvera considérablement simplifiée par la substitution des coordonnées sphériques aux coordonnées rectangulaires; ainsi l'objet spécial du calcul sera l'expression de la distance Δ qui sépare la surface de niveau et celle d'un sphéroïde de révolution prise pour surface de comparaison, normalement à la première, en fonction de la latitude et de la longitude géodésiques L et $\mathcal{L}$. Nous aurons à exprimer la différentielle totale de Δ, à laquelle nous donnerons la forme

$$(1) \qquad \frac{d\Delta}{k} = \mathrm{F}(\mathrm{L}, \mathcal{L})d\mathrm{L} + f(\mathrm{L}, \mathcal{L})d\mathcal{L},$$

k étant une constante, et F, f désignant les caractéristiques de fonctions.

Les fonctions F et f ne sont pas susceptibles d'expressions analytiques définies : elles dépendent des différences entre les latitudes, longitudes ou azimuts astronomiques et géodésiques, et s'annulent avec ces différences. On peut seulement, à l'aide des observations, les représenter par des séries trigonométriques, les unes simples, les autres doubles; mais il résulte de la théorie des équations différentielles totales que les coefficients de ces séries doivent avoir entre eux des relations qui satisfassent à l'équation de condition

$$(2) \qquad \frac{d\mathrm{F}(\mathrm{L}, \mathcal{L})}{d\mathcal{L}} = \frac{df(\mathrm{L}, \mathcal{L})}{d\mathrm{L}};$$

autrement $d\Delta$ ne serait pas la différentielle exacte d'une fonction Δ.

Cette équation de condition entre les données équivaut nécessairement à celle qu'a trouvée M. Bertrand.

Ayant satisfait à cette équation, nous obtiendrons pour intégrale

$$(3) \qquad \frac{1}{k}\Delta = \int f(\mathrm{L}, \mathcal{L})d\mathcal{L} + \int \left[\mathrm{F}(\mathrm{L}, \mathcal{L}) - \int \frac{df}{d\mathrm{L}}d\mathcal{L}\right]d\mathrm{L},$$

ou

$$(3') \qquad \frac{1}{k}\Delta = \int \mathrm{F}(\mathrm{L}, \mathcal{L})d\mathrm{L} + \int \left[f(\mathrm{L}, \mathcal{L}) - \int \frac{d\mathrm{F}}{d\mathcal{L}}d\mathrm{L}\right]d\mathcal{L}.$$

Les applications de cette formule à la détermination de la *vraie* figure de la Terre résulteront de la considération des coefficients des développements des fonctions F et f.

Analyse. — Nous prendrons, pour origine de coordonnées rectangulaires, le centre de gravité de la Terre; les axes des x et y seront situés dans le plan de l'équateur, et l'axe des z coïncidera avec l'axe de rotation, son côté positif étant dans l'hémisphère où les latitudes sont positives.

Soient :

x, y, z les coordonnées des points de la surface de l'ellipsoïde de révolution qui sert de surface de comparaison; a et c les demi-axes équatorial et polaire;

x', y', z' les coordonnées de la surface de niveau en un point M'; N' la direction de la normale en ce point;

Δ la distance du point M' au point M, où la normale N' rencontre la surface de l'ellipsoïde.

En convenant de prendre Δ positif lorsque le point M' est extérieur à l'ellipsoïde, on aura

$$(4) \qquad \frac{x'-x}{\cos(N', x)} = \frac{y'-y}{\cos(N', y)} = \frac{z'-z}{\cos(N', z)} = \Delta;$$

d'où

$$\Delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2;$$

puis

$$\Delta\, d\Delta = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz),$$

ou, en vertu de (4),

$$d\Delta = \cos(N', x)(dx'-dx) + \cos(N', y)(dy'-dy) + \cos(N', z)(dz'-dz).$$

Or, ds' désignant un élément linéaire pris sur la surface de niveau, on a

$$\cos(N', x)\, dx' + \cos(N', y)\, dy' + \cos(N', z)\, dz' = \cos(N', ds')\, ds',$$

quantité nulle, puisque N' et ds' sont perpendiculaires; la valeur

de $d\Delta$ se réduit ainsi à

$$d\Delta = -\cos(N', x)\,dx - \cos(N', y)\,dy - \cos(N', z)\,dz.$$

D'autre part, la direction de la normale N′ n'étant autre que celle de la verticale vraie, si l'on désigne par L′ la latitude astronomique en M′, et $\mathcal{L}'$ la longitude astronomique comptée du méridien qui passe par l'axe des x et dans le sens de x vers y, on a

$$\cos(N', x) = \cos L' \cos \mathcal{L}', \quad \cos(N', y) = \cos L' \sin \mathcal{L}', \quad \cos(N', z) = \sin L';$$

il s'ensuit

$$(5) \qquad d\Delta = -\cos L' \cos \mathcal{L}'\,dx - \cos L' \sin \mathcal{L}'\,dy - \sin L'\,dz.$$

Passons actuellement aux expressions des coordonnées x, y, z en fonction des latitudes et longitudes géodésiques L et $\mathcal{L}$. Soit

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface quelconque; on a, entre les cosinus des angles que la normale N au point (x, y, z) fait avec les trois axes et les dérivées partielles de φ, les relations

$$\frac{\cos(N, x)}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{\cos(N, y)}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\cos(N, z)}{\frac{d\varphi}{dz}} = \frac{1}{2} V,$$

où $\frac{1}{2} V$ [*] désigne la valeur commune de ces rapports. De là on déduit

$$\frac{1}{4} V^2 = \frac{1}{\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}}$$

et

$$(6) \quad \cos(N, x) = \frac{1}{2} V \frac{d\varphi}{dx}, \quad \cos(N, y) = \frac{1}{2} V \frac{d\varphi}{dy}, \quad \cos(N, z) = \frac{1}{2} V \frac{d\varphi}{dz}.$$

---

[*] *P. S.* On donnera dans le Mémoire suivant la relation qui lie la fonction V avec le rayon de courbure de la section méridienne de l'ellipsoïde.

Dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, on a

$$(7)\qquad \varphi = \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

$$(8)\qquad \frac{d\varphi}{dx} = 2\frac{x}{a^2},\quad \frac{d\varphi}{dy} = 2\frac{y}{a^2},\quad \frac{d\varphi}{dz} = 2\frac{z}{c^2};$$

il s'ensuit

$$(9)\qquad V^2 = \frac{1}{\dfrac{x^2+y^2}{a^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}.$$

Mais nos cosinus ont, en fonction de L et $\mathcal{L}$, les valeurs suivantes :

$$\cos(N, x) = \cos L \cos \mathcal{L},\quad \cos(N, y) = \cos L \sin \mathcal{L},\quad \cos(N, z) = \sin L;$$

on a donc, en vertu de (6) et (8),

$$(10)\qquad V\frac{x}{a^2} = \cos L \cos \mathcal{L},\quad V\frac{y}{a^2} = \cos L \sin \mathcal{L},\quad V\frac{z}{c^2} = \sin L,$$

expressions où V doit être pris avec le signe +, afin que x, y et z aient respectivement les signes de $\cos \mathcal{L}$, $\sin \mathcal{L}$ et $\sin L$, comme il convient.

Des deux premières relations (10) on tire

$$(11)\qquad V\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^4}} = \cos L;$$

d'un autre côté, l'expression (7) permet de poser

$$(12)\qquad \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2}} = \cos\lambda,\quad \frac{z}{c} = \sin\lambda,$$

λ étant une auxiliaire que l'on nomme *latitude réduite*. Au moyen de cette quantité, l'expression (11) et la troisième (10) donnent

$$(13)\qquad V\cos\lambda = a\cos L,\quad V\sin\lambda = c\sin L;$$

d'où l'on tire

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{tang}\lambda = \frac{c}{a}\operatorname{tang} L,$$

sous la condition que V soit > 0, puis

$$\text{(15)} \qquad V = a\frac{\cos L}{\cos\lambda} = c\frac{\sin L}{\sin\lambda}.$$

L'expression (14) justifie la dénomination de *latitude réduite*.

Éliminant V entre ces dernières équations et les relations (10), on obtient finalement les expressions

$$\text{(16)} \qquad x = a\cos\lambda\cos\varphi, \quad y = a\cos\lambda\sin\varphi, \quad z = c\sin\lambda.$$

Différentiant ces expressions, il vient

$$\begin{aligned} dx &= -a\sin\lambda\cos\varphi\, d\lambda - a\cos\lambda\sin\varphi\, d\varphi, \\ dy &= -a\sin\lambda\sin\varphi\, d\lambda + a\cos\lambda\cos\varphi\, d\varphi, \\ dz &= +c\cos\lambda\, d\lambda. \end{aligned}$$

Pour rétablir dL à la place de $d\lambda$, nous aurons, en différentiant (14), et ayant égard aux relations (13) ou (15),

$$d\lambda = \frac{ac}{V^2}\, dL;$$

d'où, en vertu des mêmes relations,

$$a\sin\lambda\, d\lambda = \frac{a^2c^2}{V^3}\sin L\, dL, \quad c\cos\lambda\, d\lambda = \frac{a^2c^2}{V^3}\cos L\, dL.$$

Au moyen de ces valeurs, il vient

$$\text{(17)} \qquad \left\{ \begin{aligned} dx &= -\frac{a^2c^2}{V^3}\sin L\cos\varphi\, dL - a\cos\lambda\sin\varphi\, d\varphi, \\ dy &= -\frac{a^2c^2}{V^3}\sin L\sin\varphi\, dL + a\cos\lambda\cos\varphi\, d\varphi, \\ dz &= +\frac{a^2c^2}{V^3}\cos L\, dL. \end{aligned} \right.$$

Transportons ces quantités dans l'équation (5), nous aurons d'abord

$$d\Delta = -\frac{a^2c^2}{V^3}[\sin L' \cos L - \sin L \cos L' \cos(\mathcal{L}' - \mathcal{L})]dL$$
$$- a\cos\lambda \cos L' \sin(\mathcal{L}' - \mathcal{L})d\mathcal{L},$$

puis

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} d\Delta = &-\frac{a^2c^2}{V^3}[\sin(L' - L) + 2\sin L \cos L' \sin^2\tfrac{1}{2}(\mathcal{L}' - \mathcal{L})]dL \\ &- a\cos\lambda \cos L' \sin(\mathcal{L}' - \mathcal{L})d\mathcal{L}. \end{aligned}\right.$$

Cette équation est rigoureuse; mais on peut la simplifier, tout en lui conservant une exactitude plus que suffisante. En effet, les différences $L' - L$ et $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$ sont généralement égales à un petit nombre de secondes, et, dans les cas les plus extrêmes, elles ne paraissent guère dépasser 1 ou 2 minutes d'arc : cela permet d'en négliger les carrés et les puissances supérieures. Afin de pouvoir conserver les différences $L' - L$ et $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$ exprimées en secondes d'arc, nous mettrons, à la place de leurs sinus, leurs produits par $\sin 1''$. Posons, en conséquence,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &k = -a\sin 1'', \\ &F(L, \mathcal{L}) = \frac{ac^2}{V^3}(L' - L), \quad f(L, \mathcal{L}) = \cos\lambda \cos L'(\mathcal{L}' - \mathcal{L}), \end{aligned}\right.$$

l'expression (18) deviendra

$$(20)\qquad \frac{d\Delta}{k} = F(L, \mathcal{L})dL + f(L, \mathcal{L})d\mathcal{L}$$

et coïncidera avec l'expression (1) qu'il s'agissait de former.

On remarquera que, à cause du faible aplatissement du sphéroïde, L et λ différeront peu, et le facteur $\frac{ac^2}{V^3}$ sera peu différent de l'unité : il s'ensuit que la fonction $F(L, \mathcal{L})$ sera sensiblement égale à $L' - L$. Quant à la fonction $f(L, \mathcal{L})$, on voit que, étant divisée par $\cos\lambda$, elle représentera la différence de longitude $(\mathcal{L}' - \mathcal{L})$ réduite en arc de

grand cercle. On devra avoir égard à cette circonstance dans le calcul du développement de la fonction $f(L, \mathfrak{L})$.

De ces remarques il résulte que l'équation de condition (2) revient sensiblement à

$$(20\ bis)\qquad \frac{d(L'-L)}{d\mathfrak{L}} = \frac{d.\cos^2 I.(\mathfrak{L}'-\mathfrak{L})}{dL}\ [*];$$

ce qui suffit pour en exprimer la signification géométrique : nous effectuerons bientôt le développement exact de l'équation (2).

Il a été dit plus haut que les fonctions F et f ne sont pas susceptibles d'expressions analytiques définies; mais on peut en exprimer les valeurs numériques au moyen de séries trigonométriques. Quand il s'agit d'une fonction d'une seule variable indépendante, on fait usage de séries de termes procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples entiers de la variable, et les coefficients de ces termes sont constants. Or il est visible qu'on parviendra à représenter une fonction de deux variables si l'on remplace les coefficients de la série propre à représenter la fonction d'une seule variable par autant de séries toutes pareilles, mais procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de l'autre variable. La série qui en résultera comprendra donc tous les termes qu'on pourra former avec un sinus ou cosinus de multiple de l'une des variables, multipliant un sinus ou cosinus de multiple de l'autre variable.

Ceci posé, si l'on sépare, pour plus de clarté, les termes correspondant aux multiples nuls de l'une ou l'autre variable, la forme générale de la fonction F sera

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} F(L, \mathfrak{L}) = C_0 &+ \Sigma C_i \cos iL + \Sigma E_i \sin iL + \Sigma G_{i'} \cos i'\mathfrak{L} + \Sigma K_{i'} \sin i'\mathfrak{L} \\ &+ \Sigma\Sigma(\ M_{i,i'} \cos iL \cos i'\mathfrak{L} + N_{i,i'} \sin iL \cos i'\mathfrak{L} \\ &\qquad + P_{i,i'} \cos iL \sin i'\mathfrak{L} + Q_{i,i'} \sin iL \sin i'\mathfrak{L}); \end{aligned}\right.$$

i et i' désignent des entiers positifs, différents de zéro et s'étendant

[*] *P. S.* L'équation (20 *bis*) constitue le troisième théorème sur les attractions locales. Dans le Mémoire suivant, le même théorème sera présenté sous une autre forme.

de 1 à l'infini. La fonction f se développe de la même manière; seulement nous écrirons, pour plus de commodité, les termes compris sous la parenthèse dans l'ordre inverse : nous aurons de la sorte

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} f(\mathrm{L}, \mathfrak{L}) = c_0 &+ \Sigma c_i \cos i\mathrm{L} + \Sigma e_i \sin i\mathrm{L} + \Sigma g_{i'} \cos i'\mathfrak{L} + \Sigma k_{i'} \sin i'\mathfrak{L} \\ &+ \Sigma\Sigma\big(m_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \sin i'\mathfrak{L} + n_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \sin i'\mathfrak{L} \\ &\qquad + p_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \cos i'\mathfrak{L} + q_{i'i'} \cos i\mathrm{L} \cos i'\mathfrak{L}\big). \end{aligned}\right.$$

Différentiant ces expressions, la première par rapport à $\mathfrak{L}$, la seconde par rapport à L, il viendra

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{F}(\mathrm{L}, \mathfrak{L})}{d\mathfrak{L}} &= -\Sigma i' \mathrm{G}_{i'} \sin i'\mathfrak{L} + \Sigma i' \mathrm{K}_{i'} \cos i'\mathfrak{L} \\ &\quad + \Sigma\Sigma\big(- i' \mathrm{M}_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \sin i'\mathfrak{L} - i' \mathrm{N}_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \sin i'\mathfrak{L} \\ &\qquad + i' \mathrm{P}_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \cos i'\mathfrak{L} + i' \mathrm{Q}_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \cos i'\mathfrak{L}\big), \\ \frac{df(\mathrm{L}, \mathfrak{L})}{d\mathrm{L}} &= -\Sigma i c_i \sin i\mathrm{L} + \Sigma i e_i \cos i\mathrm{L} \\ &\quad + \Sigma\Sigma\big(i m_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \sin i'\mathfrak{L} - i n_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \sin i'\mathfrak{L} \\ &\qquad + i p_{i,i'} \cos i\mathrm{L} \cos i'\mathfrak{L} - i q_{i,i'} \sin i\mathrm{L} \cos i'\mathfrak{L}\big). \end{aligned}$$

Ces deux dérivées devant être égales quels que soient L et $\mathfrak{L}$, suivant l'équation de condition (2), les coefficients des séries F et f devront satisfaire aux relations

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{G}_{i'} = 0, \quad \mathrm{K}_{i'} = 0, \quad c_i = 0, \quad e_i = 0; \\ &i m_{i,i'} = -i' \mathrm{M}_{i,i'}, \quad i n_{i,i'} = +i' \mathrm{N}_{i,i'}, \quad i p_{i,i'} = -i' \mathrm{P}_{i,i'}, \quad i q_{i,i'} = -i' \mathrm{Q}_{i,i'}. \end{aligned}\right.$$

On pourrait évidemment déterminer les coefficients qui correspondent à chacune des séries (21) et (22), en employant un nombre suffisant de valeurs numériques des fonctions F et f, puis constater ensuite si les valeurs obtenues satisfont aux conditions (23). Or on trouverait généralement de légères discordances, à cause des erreurs qui affectent inévitablement les fonctions F et f. Il est vrai que cette manière d'opérer offrirait le moyen de contrôler les données du problème; mais les discordances subsistantes seraient un objet d'embarras, que l'on évitera en assujettissant d'abord les coefficients à satisfaire aux conditions (23) et déterminant ensuite l'ensemble des

coefficients, au moyen des équations en F et f réunies : la résolution achevée, les erreurs résiduelles des équations montreront, par leur degré de petitesse, l'accord que présentent les données, et offriront un moyen de contrôle équivalent au précédent.

C'est ici le lieu de faire remarquer que les fonctions f doivent, avant d'être employées à la résolution des équations, être divisées membre à membre par la valeur de $\cos\lambda$ correspondant à chacune d'elles; autrement ces équations, à égal degré de précision des données, n'auraient pas des poids égaux entre eux ni aux poids des équations en F. Les parties connues des équations en f seront ainsi réduites à $\cos L'(\mathcal{L}' - \mathcal{L})$.

Nous assujettirons donc immédiatement les valeurs de F et f aux conditions (23); ce qui donnera

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} F(L,\mathcal{L}) = {} & C_0 + \Sigma C_i \cos iL + \Sigma E_i \sin iL \\ & + \Sigma\Sigma\big(M_{i,i'} \cos iL \cos i'\mathcal{L} + N_{i,i'} \sin iL \cos i'\mathcal{L} \\ & \qquad + P_{i,i'} \cos iL \sin i'\mathcal{L} + Q_{i,i'} \sin iL \sin i'\mathcal{L}\big), \end{aligned}\right.$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} f(L,\mathcal{L}) = {} & c_0 + \Sigma g_{i'} \cos i'\mathcal{L} + \Sigma k_{i'} \sin i'\mathcal{L} \\ & + \Sigma\Sigma\Big(- M_{i,i'} \frac{i'}{i} \sin iL \sin i'\mathcal{L} + N_{i,i'} \frac{i'}{i} \cos iL \sin i'\mathcal{L} \\ & \qquad + P_{i,i'} \frac{i'}{i} \sin iL \cos i'\mathcal{L} - Q_{i,i'} \frac{i'}{i} \cos iL \cos i'\mathcal{L}\Big). \end{aligned}\right.$$

Actuellement nous pouvons procéder à l'intégration de $d\Delta$. Appliquons la formule (3) : nous aurons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{df}{dL} = \Sigma\Sigma\big(& - i' M_{i,i'} \cos iL \sin i'\mathcal{L} - i' N_{i,i'} \sin iL \sin i'\mathcal{L} \\ & + i' P_{i,i'} \cos iL \cos i'\mathcal{L} + i' Q_{i,i'} \sin iL \cos i'\mathcal{L}\big); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{df}{dL} d\mathcal{L} = \Sigma\Sigma\big(& M_{i,i'} \cos iL \cos i'\mathcal{L} + N_{i,i'} \sin iL \cos i'\mathcal{L} \\ & + P_{i,i'} \cos iL \sin i'\mathcal{L} + Q_{i,i'} \sin iL \sin i'\mathcal{L}\big), \end{aligned}$$

puis

$$F(L,\mathcal{L}) - \int \frac{df}{dL} dL = C_0 + \Sigma C_i \cos iL + \Sigma E_i \sin iL,$$

quantité indépendante de $\mathcal{L}$, comme cela doit être.

Effectuant les deux intégrations restantes, il vient finalement, d'après la formule (3),

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{k}(\Delta - \Delta_0) = {} & c_0 \mathcal{L} + \Sigma \frac{g_{i'}}{i'} \sin i' \mathcal{L} - \frac{k_{i'}}{i'} \cos i' \mathcal{L} \\ & + \Sigma\Sigma \left(\frac{M_{i,i'}}{i} \sin iL \cos i' \mathcal{L} - \frac{N_{i,i'}}{i} \cos iL \cos i' \mathcal{L} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{P_{i,i'}}{i} \sin iL \sin i' \mathcal{L} - \frac{Q_{i,i'}}{i} \cos iL \sin i' \mathcal{L} \right) \\ & + C_0 L + \Sigma \frac{C_i}{i} \sin iL - \Sigma \frac{E_i}{i} \cos iL, \end{aligned}\right.$$

expression dans laquelle $\mathcal{L}$ et L en dehors des signes sin et cos doivent être exprimés en nombres abstraits.

$\frac{\Delta_0}{k}$ est la constante de l'intégration, que l'on obtiendra en fixant une condition telle que serait celle du minimum de la somme $\Sigma\Delta^2$ [*].

Nous rappellerons que, d'après notre premier théorème sur les attractions locales, les longitudes peuvent être généralement remplacées par les azimuts. Or, suivant ce théorème, on a, quelles que soient ces attractions,

$$(27)\qquad Z' - Z + \sin L'(\mathcal{L}' - \mathcal{L}) = 0,$$

en désignant par Z' et Z les azimuts astronomique et géodésique. On effectuera la substitution dont il s'agit, en posant (19)

$$(28)\qquad f(L, \mathcal{L}) = -\frac{\cos\lambda}{\operatorname{tang} L'}(Z' - Z).$$

On observera seulement que cette fonction sera mal déterminée dans les régions équatoriales ; c'est qu'en effet, à l'équateur, l'influence des attractions locales sur les azimuts étant nulle, le rapport $\frac{Z' - Z}{\operatorname{tang} L'}$ y devient indéterminé.

Au reste, l'emploi des azimuts, dans le problème actuel, ne paraît pas offrir autant de garanties de précision que celui des longitudes, attendu que les erreurs des azimuts géodésiques doivent croître plus

---

[*] L'ordonnée Δ est identique avec la différence $h - h'$ que nous avons considérée dans notre Communication du 28 décembre 1868

rapidement, avec la longueur des lignes géodésiques, que celles des longitudes.

La formule (26) contient les termes $c_0 \mathfrak{L}$ et $C_0 L$, dont la présence peut surprendre tout d'abord ; il est cependant facile de s'expliquer leur existence : si, par exemple, les constantes linéaires des calculs géodésiques ne sont pas tout à fait exactes, les extrémités des lignes géodésiques détermineront des longitudes, latitudes et azimuts d'autant plus erronés que ces lignes seront plus étendues; en un mot, les coordonnées et azimuts géodésiques seront affectés d'erreurs systématiques, ou croissantes avec L et $\mathfrak{L}$. Si donc le calcul des coefficients des fonctions F et f conduit à des valeurs de c_0 et C_0 qui ne soient pas négligeables, on aura la preuve que les constantes employées dans les calculs géodésiques doivent être corrigées.

Rien n'empêche d'ailleurs de joindre aux fonctions F et f les termes destinés à corriger les coordonnées et azimuts géodésiques, relativement aux constantes qui ont servi de point de départ dans les calculs; de cette manière, on obtiendrait à la fois les dimensions de l'ellipsoïde de révolution qui satisfont le mieux à l'ensemble des observations, et les constantes propres à déterminer, au moyen de la formule (26), la vraie figure de la surface de niveau.

Si, au lieu de vouloir déterminer la figure de la surface de niveau dans toute l'étendue que comprennent les réseaux géodésiques, on se propose de déterminer le profil de cette surface le long d'une ligne tracée arbitrairement sur la surface de comparaison, le problème sera bien facile à résoudre; en effet, soit

$$\psi(L, \mathfrak{L}) = 0 \tag{29}$$

l'équation de la ligne donnée; on déduira de cette équation

$$\frac{d\psi}{dL} dL + \frac{d\psi}{d\mathfrak{L}} d\mathfrak{L} = 0,$$

relation qui servira à exprimer $d\mathfrak{L}$ en fonction de dL, ou inversement. Si l'on pose

$$F_1(L) = \frac{ae^2}{V^3 \rho}(L' - L) - \frac{\frac{d\psi}{dL}}{\frac{d\psi}{d\mathfrak{L}}} \cos\lambda \cos L'(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}), \tag{30}$$

ou

$$(30)' \qquad f_1(\mathcal{L}) = -\frac{\frac{d\psi}{d\mathcal{L}}}{\frac{d\psi}{dL}}\frac{ac^2}{V^3}(L' - L) + \cos\lambda \cos L'(\mathcal{L}' - \mathcal{L}),$$

l'expression (20) prendra l'une des formes

$$(31) \qquad \frac{d\Delta}{k} = F_1(L)dL \quad \text{ou} \quad \frac{d\Delta}{k} = f_1(\mathcal{L})d\mathcal{L};$$

et les valeurs de F_1 et f_1 étant développées en séries trigonométriques simples, et procédant, la première suivant les multiples de L, la seconde suivant ceux de $\mathcal{L}$, on intégrera sans difficulté celle des équations précédentes qu'on aura choisie.

Considérons en particulier le cas des méridiens et des parallèles.

Dans le cas d'une ligne méridienne, on a, dans toute son étendue, $d\mathcal{L} = 0$, et si l'on pose

$$(32) \qquad F_2(L) = \frac{ac^2}{V^2}(L' - L),$$

la formule (20) donne

$$(33) \qquad \Delta = k\int F_2(L)dL.$$

Dans celui d'un arc de parallèle, ou de $dL = 0$, on poserait

$$(34) \qquad f_2(\mathcal{L}) = \mathcal{L}' - \mathcal{L};$$

d'où

$$(35) \qquad \Delta = k\cos\lambda \cos L' \int f_2(\mathcal{L})d\mathcal{L}.$$

en négligeant les minimes variations de $\cos L'$.

Modes d'application de la nouvelle méthode pour déterminer la vraie *figure de la Terre et comparaison avec celle qui repose sur l'emploi des nivellements.* — La nouvelle méthode, n'exigeant pas d'autres opérations de nivellement que celles qui s'exécutent sur l'instrument astronomique, dans les observations de latitude, de longitude ou azimut,

est exempte des erreurs inhérentes aux nivellements géodésiques. On a vu, d'ailleurs, que ces nivellements exigent, pour être corrects, des observations de latitude et de longitude ou azimut en chaque station : en d'autres termes, que des observations astronomiques soient exécutées sur tous les points de station de la ligne géodésique. La nouvelle méthode n'exige pas l'exécution de ces travaux sur des points aussi rapprochés; le plus souvent, il suffirait d'un espacement d'un degré, tant en longitude qu'en latitude, entre les stations astronomiques. Enfin cette méthode présente un moyen très-précieux de vérifier l'exactitude des données empruntées aux observations.

Les différences que nous venons de signaler entre les exigences des deux méthodes semblent devoir établir une supériorité en faveur de la nouvelle. Examinons quels sont ses inconvénients. Le principal serait dans la longueur des calculs à effectuer pour la détermination des coefficients des doubles séries trigonométriques à l'aide desquelles sont représentées les différences des coordonnées ou azimuts, astronomiques et géodésiques. Assurément ces calculs, étendus aux principaux points d'un réseau de triangles qui couvrirait l'Europe entière, par exemple, seraient fort longs; mais ils ne seraient pas plus impraticables que les calculs ayant pour objet la compensation des erreurs des angles des triangles.

Admettons que l'on renonce à faire une application aussi étendue, au moyen d'un calcul d'ensemble; voici comment on procéderait pour éviter l'emploi des séries doubles sur une grande échelle. Sur le parallèle moyen de la région considérée, on fixerait un certain nombre de points satisfaisant à la double condition d'être aussi également espacés entre eux et aussi voisins d'une station astronomique que possible; par une interpolation étendue aux stations comprises dans un certain rayon autour de chaque point considéré, on calculerait les valeurs des différences entre les longitudes ou azimuts astronomiques et géodésiques qui n'ont pas été observées en ce point. A cause du petit nombre de stations comprises dans un rayon peu étendu, cette interpolation, bien que nécessitant l'emploi de doubles séries trigonométriques, ne serait pas un obstacle; dans cette interpolation on aurait égard aux relations (23) entre les coefficients. Ce travail étant effectué pour chacun des points pris sur le parallèle, les résultats seraient

représentés par des séries trigonométriques simples, et le calcul des altitudes des points de la surface de niveau se ferait sans la moindre difficulté. On aurait ainsi le profil de cette surface le long du parallèle considéré.

Concevons que par chacun des points du parallèle on fasse passer un méridien. En empruntant au parallèle la cote d'altitude de départ, et procédant à l'égard de ces méridiens comme il a été dit à l'égard du parallèle, on obtiendra pareillement le profil de la surface de niveau le long de chacun de ces méridiens.

Il reste à vérifier l'exactitude des résultats obtenus. Les moyens de contrôle s'offrent d'eux-mêmes. Que l'on fasse passer des arcs de parallèles vers les limites nord et sud des méridiens, et que l'on emprunte au méridien moyen les cotes de départ, on déterminera deux nouveaux profils de parallèles, et les cotes d'altitude qu'on en déduira, pour leurs points d'intersection avec les divers méridiens, seront comparées aux cotes des mêmes points qui ont été fournies par les méridiens eux-mêmes. Il va sans dire qu'on n'obtiendra pas une concordance parfaite; mais si les différences sont assez faibles pour pouvoir être imputées aux erreurs admissibles des données de l'observation, on n'aura plus qu'à effectuer une compensation analogue à celle qu'il faut presque toujours faire dans les opérations de nivellement ou les triangulations les plus soignées.

Il est encore un point par rapport auquel il convient de comparer les deux méthodes. Dans la première, on peut substituer les observations d'azimut à celles des longitudes, lorsque les chaînes de triangles ont été vérifiées dans leur ensemble; pourvu que, dans le voisinage de l'équateur, on évite les observations azimutales de signaux dont la direction s'écarte trop du méridien. La nouvelle méthode, au contraire, n'admet pas la substitution dont il s'agit, pour les régions voisines de l'équateur. Il n'en résulte cependant aucun désavantage pour cette dernière, attendu que, les stations astronomiques étant beaucoup moins multipliées que ne l'exige la première méthode, et généralement établies aux nœuds des chaînes de triangles, on ne négligera jamais d'y faire les observations de longitude. Les observations d'azimut seront faites dans ces stations uniquement pour contrôler les triangulations.

Enfin, la nouvelle méthode n'exigeant aucune nouvelle opération sur le terrain, on trouvera sans doute convenable d'en faire usage concurremment avec la première. En Géodésie, les vérifications sont souvent bien utiles.

La connaissance de la figure de la surface de niveau permettra d'appliquer aux calculs ordinaires de la Géodésie une correction à laquelle on n'a pas songé jusqu'ici, et qui pourra n'être pas sans importance. Les bases sont réduites au niveau de la mer, que l'on confond ordinairement avec la surface de l'ellipsoïde de révolution, tandis qu'il faudrait les réduire à cette dernière surface; or cela sera facilement praticable, dès qu'on aura fait l'application des nouvelles méthodes. Par les chiffres qui seront présentés dans un instant, on jugera si les corrections dont il s'agit ne pourraient pas atténuer les discordances que présentent certains réseaux trigonométriques.

On appréciera également si la configuration irrégulière de la surface de niveau, dans le voisinage des observatoires, surface à laquelle les couches atmosphériques de même densité sont parallèles, n'exerce aucune influence sur les réfractions astronomiques [*]. Sous ce rapport, une étude analogue à celle que M. Schwitzer a faite aux environs de Moscou, et qui s'étendrait à une surface de 100 à 120 kilomètres de rayon autour de Paris, serait d'un certain intérêt pour notre Observatoire.

Il y a plusieurs années, j'ai obtenu, relativement à la région caucasienne, un résultat que je me suis abstenu de publier, parce qu'il repose sur des données très-incomplètes : aussi le présenterai-je aujourd'hui, non comme l'expression d'une réalité, mais seulement d'une possibilité.

Le colonel Chodzko aurait constaté, dans le Caucase, des différences entre les latitudes astronomiques et géodésiques, variant de 54 se-

[*] Qui sait si les réfractions calculées en ayant égard à la *vraie* figure de la surface de niveau n'atténueraient pas sensiblement les discordances systématiques que présentent les meilleurs catalogues d'étoiles? Il faudrait, pour cela, que la correction qui en résulterait pour les réfractions pût atteindre 1 à 2 secondes. Nous nous réservons d'examiner cette question une autre fois.

condes, dans une amplitude d'arc de méridien moindre qu'un degré : voilà, certes, un système de données bien incomplet. Pour en déduire un résultat, il fallait nécessairement le compléter par des hypothèses. Voici celles que j'ai faites : 1° le point où les latitudes astronomiques et géodésiques s'accordent est au milieu de l'arc considéré; 2° le chiffre 54 secondes est la valeur maximum des attractions locales en cette région; 3° la fonction qui exprime leur effet sur les latitudes est impaire et assujettie à la condition de s'accorder sensiblement avec la loi de la raison inverse du carré de la distance, quand les distances au milieu de l'arc méridien sont très-grandes. En conséquence j'ai admis la relation

$$L' - L = C \frac{L - L_0}{[\gamma^2 + (L - L_0)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

où L_0 désigne la latitude du milieu de l'arc, et C et γ deux constantes que les conditions énoncées déterminent.

Δ désignant l'altitude d'un point du profil méridien de la surface de niveau, dont la latitude est L, a le demi-axe équatorial et e l'excentricité de l'ellipse méridienne, on a

$$d\Delta = -\frac{a(1 - e^2)C(L - L_0)}{[\gamma^2 + (L - L_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dL;$$

d'où, en intégrant,

$$\Delta = \Delta_0 - \left[\frac{a(1 - e^2)C}{\gamma} - \frac{a(1 - e^2)C}{\sqrt{\gamma^2 + (L - L_0)^2}}\right] [*].$$

Les valeurs de C et γ que fournissent les données et conditions pré-

---

[*] En posant

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{L - L_0}{\gamma},$$

on obtient les formules suivantes, qui sont plus appropriées au calcul numérique :

$$L' - L = \frac{C}{\gamma^2} \sin\psi \cos^2\psi, \quad \Delta = \Delta_0 - 2a(1 - e^2)\frac{C}{\gamma} \sin^2 1'' \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi.$$

L_0, L, L' sont supposés exprimés en secondes.

cédentes, ont pour logarithmes

$$\text{l.}\,C = 8,65758, \quad \text{l.}\,\gamma = 3,40578.$$

A l'aide de ces données, on obtient les résultats suivants :

$L - L_0$	$L' - L$	$\Delta - \Delta_0$	$L - L_0$	$L' - L$	$\Delta - \Delta_0$
° ′	″	m	° ′	″	m
0. 0	0,0	0,00	1. 0	19,1	—11,29
0.10	15,2	— 0,72	1.10	16,1	—12,87
0.20	24,5	— 2,55	1.20	13,6	—14,20
0.30	27,0	— 4,90	1.30	11,5	—15,33
0.40	25,5	— 7,28	1.40	9,8	—16,28
0.50	22,4	— 9,43	1.50	8,5	—17,10
1. 0	19,1	—11,29	2. 0	7,3	—17,81

(*N. B.* $L' - L$ change de signe avec $L - L_0$; $\Delta - \Delta_0$ conserve le signe —.)

Les valeurs de $L' - L$ montrent comment les effets des attractions locales sont supposés se succéder; les valeurs négatives de $\Delta - \Delta_0$ expriment la quantité dont la surface de niveau s'abaisse au-dessous de la surface menée par le sommet de la protubérance liquide, parallèlement au sphéroïde de révolution.

Bien que ces résultats reposent en partie sur des données conjecturales, il ne paraît pas douteux que les variations d'altitude de la surface du niveau n'atteignent de 10 à 20 mètres dans le Caucase.

Voici un autre résultat bien plus extraordinaire, qui a été obtenu par M. de Benazet, ingénieur des constructions navales, et communiqué récemment au Bureau des Longitudes par cet ingénieur.

M. de Benazet, voulant connaître la déviation du pendule au Callao, dans l'Amérique australe, s'est trouvé obligé, en l'absence de chaînes de triangles reliant les deux versants des Andes, de calculer directement les attractions produites par le continent entier de l'Amérique du Sud. A cet effet, il s'est procuré des renseignements approximatifs sur le relief du sol et les densités, sur la variation de profondeur de la mer. M. de Benazet ne s'est pas contenté de calculer la déviation du pendule au Callao, déviation qu'il a trouvée dépasser plusieurs minutes; il a calculé les ordonnées du profil de la surface de la mer dans la direction perpendiculaire à la côte, au Callao. Or il a trouvé

que la mer s'abaisse progressivement, à partir de la côte, d'une quantité qui finit par rester constante, et atteint alors 137 mètres! La plupart des données du calcul de M. de Benazet sont affectées d'incertitudes; mais il paraît cependant admissible que le résultat ne soit pas affecté d'erreurs dépassant le $\frac{1}{3}$ ou le $\frac{1}{4}$ du chiffre auquel il est parvenu : on peut ainsi regarder comme très-probable que, dans une région donnée du Pacifique, les attractions du continent de l'Amérique du Sud produisent, dans le voisinage des côtes, un exhaussement atteignant 100 mètres ou plus encore.

Ces deux exemples suffiront, je pense, pour montrer toute l'importance des questions qui se rattachent à la surface de niveau : il est seulement à regretter que les travaux de géodésie astronomique n'aient pas été continués chez nous; car, autrement, il nous eût été possible de produire des résultats effectifs et intéressant, à ce titre, notre propre pays.

Nouveau mode d'application du troisième théorème sur les attractions locales au contrôle des réseaux géodésiques et à la détermination de la vraie figure de la Terre.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, séance du 7 avril 1873.)

En présentant à l'Académie une première solution du problème des surfaces de niveau, le 28 décembre 1868, j'indiquais une autre solution, fondée sur la considération des normales à une même surface de niveau, et l'existence d'une équation de condition entre les données; j'indiquais en même temps le parti que l'on pourrait tirer de cette équation pour le contrôle des opérations géodésiques. Dans la séance du 2 octobre 1871, j'ai présenté, sous une forme simple, l'équation différentielle de la surface de niveau, et j'en ai déduit l'équation de condition qui constitue le troisième théorème sur les attractions locales. L'intégration de l'équation différentielle a été effectuée au moyen des séries trigonométriques procédant suivant les sinus et cosinus des multiples des longitudes et latitudes géodésiques.

L'intégration ainsi obtenue peut rencontrer, dans la pratique, des difficultés qu'on ne parviendrait à lever qu'en recommençant le travail déjà effectué : par exemple, ce n'est qu'après avoir effectué des interpolations, que l'on parviendra à reconnaître si, dans certaines régions accidentées, le nombre des stations astronomiques est ou n'est pas suffisant pour déterminer convenablement les inflexions de la surface de niveau. Si donc on arrive à reconnaître la nécessité d'augmenter le nombre des stations dans ces régions, on sera conduit à recommencer les intégrations dans toute l'étendue des lignes géodésiques qui les traversent.

Le problème que nous voulons résoudre aujourd'hui est le suivant : Les stations astronomiques étant, par exemple, à peu près équidistantes dans le sens des méridiens et des parallèles, déterminer la figure des surfaces de niveau, dans une étendue comprenant un nombre restreint de points, tel que cinq au moins, et neuf à treize tout au plus, au moyen de l'altitude supposée connue d'un point central; les ordonnées de la surface de niveau par rapport à la surface du sphéroïde de comparaison étant ainsi connues dans l'espace considéré, on prendrait l'une des stations situées à la limite de cet espace comme point central d'une nouvelle circonscription, et en opérant ainsi de proche en proche, dans une direction déterminée, on obtiendrait les ordonnées de la surface de niveau dans toute l'étendue d'une zone de plusieurs degrés de largeur. La vérification de l'exactitude des résultats reposerait alors sur l'identité des cotes d'altitude obtenues pour une même station, qui se trouverait faire partie de plusieurs zones distinctes. Toutefois on doit remarquer que si, au lieu de diriger l'axe des zones suivant une ligne géodésique, on infléchit l'axe de la première zone parallèlement au contour de la première circonscription, les deux extrémités de la zone coïncideront, ce qui fournira la vérification la plus directe; en outre, la zone et l'espace intérieur déjà déterminé auront de nombreux points communs qui fourniront autant de vérifications distinctes. Dans cette manière de procéder, s'il arrive que, dans une région, il soit nécessaire de faire de nouvelles stations astronomiques, la partie des calculs qu'il faudra reprendre se trouvera limitée à cette même région. En continuant ainsi, on ne sera pas exposé à reprendre un ensemble de calculs déjà effectués, et l'on sera en pos-

session d'une base solide, sur laquelle pourront s'appuyer avec sécurité les déterminations relatives aux zones extérieures.

Dans ce travail, nous ferons usage des développements en séries ordonnées suivant les puissances et produits des différences des coordonnées des points considérés et du point central. Comme on peut employer les coordonnées angulaires et les coordonnées linéaires, il est clair que les développements pourront s'obtenir sous des formes différentes.

1° *Emploi des coordonnées angulaires.* — En conservant les notations de la Communication du 2 octobre 1871, et négligeant les termes du second ordre par rapport aux attractions locales, on réduit l'équation différentielle (18) de la surface du niveau à

$$(36)\qquad d\Delta = -\frac{a^2c^2}{V^2}\sin(L'-L)\,dL - a\cos\lambda\cos L\sin(\mathcal{L}'-\mathcal{L})\,d\mathcal{L},$$

équation dans laquelle on peut remplacer V et $a\cos\lambda$ par leurs valeurs en fonctions de L; les équations (13) donnent à cet effet

$$(37)\qquad V^2 = a^2\cos^2 L + c^2\sin^2 L,\quad a\cos\lambda = \frac{a^2}{V}\cos L.$$

Soient L_i et $\mathcal{L}_i$ les latitude et longitude géodésiques d'un point pris dans le voisinage du centre d'un groupe de stations peu éloignées, L et $\mathcal{L}$ désignant les coordonnées de l'une quelconque des autres; nous poserons

$$(38)\qquad s = \mathcal{L} - \mathcal{L}_i,\qquad t = L - L_i,$$

$$(39)\qquad \sigma = -\frac{a^2}{V}\cos^2 L\sin(\mathcal{L}'-\mathcal{L}),\quad \tau = -\frac{a^2c^2}{V^3}\sin(L'-L);$$

en conséquence, l'équation différentielle (36) deviendra

$$(40)\qquad d\Delta = \tau\,dt + \sigma\,ds,$$

et la condition que cette différentielle soit exacte sera

$$(41)\qquad \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\sigma}{dt}.$$

En supposant celle-ci satisfaite, on aura pour intégrale

$$(42)\qquad \Delta - \Delta_i = \int \tau\, dt + \int \left(\sigma - \int \frac{d\tau}{ds}\, dt\right) ds,$$

où Δ_i est la constante arbitraire.

Pour faire usage de cette formule, il convient de développer en séries les fonctions σ et τ : désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ des constantes à déterminer, nous poserons

$$(43)\quad \begin{cases} \sigma = \sigma_i + \alpha s + \beta t + \gamma s^2 + \varepsilon st + \varkappa t^2 + \upsilon s^3 + \varphi s^2 t + \chi st^2 + \psi t^3 + \ldots, \\ \tau = \tau_i + \alpha' s + \beta' t + \gamma' s^2 + \varepsilon' st + \varkappa' t^2 + \upsilon' s^3 + \varphi' s^2 t + \chi' st^2 + \psi' t^3 + \ldots, \end{cases}$$

et nous aurons

$$\frac{d\tau}{ds} = \alpha' + 2\gamma' s + \varepsilon' t + 3\upsilon' s^2 + 2\varphi' st + \chi' t^2 + \ldots,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \beta + \varepsilon s + 2\varkappa t + \varphi s^2 + 2\chi st + 3\psi t^2 + \ldots.$$

Or, ces deux expressions devant satisfaire à l'équation de condition (41), quelles que soient les valeurs des variables s et t, on en déduit les relations suivantes entre les coefficients :

$$(44)\quad \alpha' = \beta,\quad 2\gamma' = \varepsilon,\quad \varepsilon' = 2\varkappa,\quad 3\upsilon' = \varphi,\quad 2\varphi' = 2\chi,\quad \chi' = 3\psi, \ldots.$$

Au moyen de ces valeurs, la seconde équation (43) devient

$$(45)\quad \begin{cases} \tau = \tau_i + \beta s + \beta' t + \frac{1}{2}\varepsilon s^2 + 2\varkappa st + \varkappa' t^2 + \frac{1}{3}\varphi s^3 + \chi s^2 t \\ \qquad + 3\psi st^2 + \psi' t^3 + \ldots, \end{cases}$$

et l'on a

$$(46)\qquad \frac{d\tau}{ds} = \beta + \varepsilon s + 2\varkappa t + \varphi s^2 + 2\chi st + 3\psi t^2 + \ldots,$$

développement qui coïncide avec celui de $\frac{d\sigma}{dt}$.

La détermination des inconnues doit être effectuée au moyen de la première équation (43) et de l'équation (45) prises simultanément;

il faut seulement observer [considérant la présence du facteur $\cos^2 L$ dans l'expression (39) de σ] qu'il conviendra de diviser la première équation (43) par $\cos L$, avant de la combiner avec l'équation (45); autrement les équations n'auraient pas des poids égaux ou du moins comparables. Au moyen d'un nombre convenable de valeurs de σ et τ, on pourra déterminer les diverses inconnues qui comprendront tous les coefficients du développement de σ, et en outre les coefficients τ_i, β', $\varkappa'$, ψ',... du développement de τ. Les erreurs résiduelles des diverses équations mettront en évidence l'accord ou la discordance des données de l'observation et offriront un moyen de contrôle.

De l'expression (46) on déduit

$$-\int \frac{d\tau}{ds}\,dt = -\beta t - \varepsilon st - \varkappa t^2 - \varphi s^2 t - \chi st^2 - \psi t^3 - \ldots$$

Ajoutant cette expression avec le développement (43) de σ, il vient

$$\sigma - \int \frac{d\tau}{ds}\,dt = \sigma_i + \alpha s + \gamma s^2 + \upsilon s^3 + \ldots;$$

d'où

$$\int \left(\sigma - \int \frac{d\tau}{ds}\,dt\right) ds = \sigma_i s + \frac{1}{2}\alpha s^2 + \frac{1}{3}\gamma s^3 + \frac{1}{4}\upsilon s^4 + \ldots;$$

on a d'ailleurs, en vertu de l'équation (45),

$$\int \tau\,dt = \tau_i t + \beta st + \frac{1}{2}\beta' t^2 + \frac{1}{2}\varepsilon s^2 t + \varkappa st^2 + \frac{1}{3}\varkappa' t^3 + \frac{1}{3}\varphi s^3 t$$
$$+ \frac{1}{2}\chi s^2 t^2 + \psi st^3 + \frac{1}{4}\psi' t^4 + \ldots.$$

La somme de ces deux expressions fournit, suivant la formule (42), l'intégrale cherchée

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta - \Delta_i = {} & \sigma_i s + \tau_i t + \frac{1}{2}\alpha s^2 + \beta st + \frac{1}{2}\beta' t^2 + \frac{1}{3}\gamma s^3 + \frac{1}{2}\varepsilon s^2 t + \varkappa st^2 \\ & + \frac{1}{3}\varkappa' t^3 + \frac{1}{4}\upsilon s^4 + \frac{1}{3}\varphi s^3 t + \frac{1}{2}\chi s^2 t^2 + \psi st^3 + \frac{1}{4}\psi' t^4 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Dans les applications numériques, les quantités s et t seront exprimées par leurs valeurs en nombres abstraits ou en rapports d'arc au rayon.

2° *Emploi des coordonnées linéaires.* — Pour faire comprendre comment on est conduit à choisir les coordonnées dont il s'agit, nous ferons subir quelques transformations à l'équation différentielle (36).

Désignons par $\mathfrak{R}$ le rayon de courbure de la section méridienne au point $(L, \mathfrak{L})$, et $\mathfrak{P}$ le rayon du parallèle de latitude L, dont la valeur est $\sqrt{x^2+y^2}$, nous aurons

$$(48) \qquad \frac{a^2c^2}{V^3} = \mathfrak{R}, \quad a\cos\lambda = \mathfrak{P}\,[^*],$$

relations dont la seconde se déduit de la première équation (12).

Posons encore

$$(49) \qquad \mu = a\sin(L'-L), \quad \varpi = a\cos L\sin(\mathfrak{L}'-\mathfrak{L});$$

l'équation (36) multipliée par $-a$ deviendra

$$(50) \qquad -a\,d\Delta = \mu\mathfrak{R}\,dL + \varpi\mathfrak{P}\,d\mathfrak{L}:$$

---

[*] *P. S.* Soit $x_1 = \sqrt{x^2+y^2}$, on aura

$$\mathfrak{R} = \pm\frac{\left(1+\dfrac{dz^2}{dx_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2z}{dx_1^2}},$$

où x_1 et z, ainsi que leurs différentielles, sont liés par les relations

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x_1dx_1}{a^2}+\frac{zdz}{c^2}=0, \quad \frac{dx_1^2}{a^2}+\frac{dz^2}{c^2}+\frac{zd^2z}{c^2}=0;$$

de là on déduit, en ayant égard à l'équation (9),

$$1+\frac{dz^2}{dx_1^2}=1+\frac{c^4}{a^4}\frac{x_1^2}{z^2}=\frac{c^4}{z^2}\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)=\frac{c^4}{z^2V^2},$$

$$\frac{d^2z}{dx_1^2}=-\frac{1}{z}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{dz^2}{dx_1^2}\right)=-\frac{c^2}{a^2z}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\frac{x_1^2}{z^2}\right)=-\frac{c^4}{a^2z^3},$$

et il vient

$$\mathfrak{R}=\frac{a^2c^2}{V^3}.$$

Soit $\mathfrak{N}$ le rayon de courbure d'une section normale perpendiculaire au méridien, on

le facteur a, introduit ici, a pour objet de rendre plus claire l'interprétation géométrique de l'équation de condition relative à l'intégrabilité. Cette équation est

$$\frac{d.\mu\mathcal{R}}{d\mathcal{L}} = \frac{d.\varpi\mathcal{P}}{dL},$$

ou, en observant que $\mathcal{R}$ n'est pas fonction de $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{R}\frac{d\mu}{d\mathcal{L}} = \mathcal{P}\frac{d\varpi}{dL} + \varpi\frac{d\mathcal{P}}{dL}.$$

Or on a, en vertu des relations (37) et (48),

$$(51) \qquad \mathcal{P} = \frac{a^2}{V}\cos L.$$

Différentiant cette équation, et ayant égard à la première équation (37) qui donne

$$(52) \qquad V\frac{dV}{dL} = -(a^2 - c^2)\sin L\cos L,$$

---

aura, suivant le théorème de Meunier, entre cette longueur et le rayon $\mathcal{P}$ de la section oblique faisant l'angle L avec la précédente, la relation $\mathcal{P} = \mathcal{N}\cos L$. Soit, d'autre part, N la *grande normale* des géodésiens, ou la partie de la normale comprise entre la surface du sphéroïde et l'axe de révolution, on aura également $\mathcal{P} = N\cos L$. Il résulte de ces relations, et en ayant égard à l'équation (11),

$$\mathcal{N} = N = \frac{a^2}{V} \quad \text{et} \quad V = \frac{a^2}{N};$$

on aurait encore

$$\mathcal{R} = \frac{c^2N^3}{a^4} \quad \text{et} \quad V = c\sqrt{\frac{N}{\mathcal{R}}}.$$

Il existe des Tables qui donnent les valeurs de N et de $\mathcal{R}$ en fonction de la latitude; on en déduirait, au besoin, celles de la fonction V.

Désignons enfin par ρ le rayon de courbure d'une section normale faite suivant l'azimut Z; on aura, d'après le théorème d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathcal{R}}\cos^2 Z + \frac{1}{\mathcal{P}}\sin^2 Z,$$

relation qui détermine ρ, et pourra être utilisée dans la théorie des réfractions terrestres appliquées aux nivellements géodésiques.

il vient

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{P}}{dL} &= -\frac{a^2}{V}\sin L - \frac{a^2}{V^2}\frac{dV}{dL}\cos L = -\frac{a^2}{V}\sin L\left[1-(a^2-c^2)\frac{\cos^2 L}{V^2}\right] \\ &= -\frac{a^2c^2}{V^3}\sin L = -\mathfrak{R}\sin L. \end{aligned}\right.$$

Substituant cette valeur dans l'équation de condition, et divisant ensuite par $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$, on trouve

$$(54)\qquad \frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{d\mu}{d\mathfrak{L}} = \frac{1}{\mathfrak{R}}\frac{d\varpi}{dL} - \frac{\varpi}{\mathfrak{P}}\sin L,$$

résultat qui peut se mettre sous une autre forme. Suivant le premier théorème sur les attractions locales, on a

$$\sin(Z'-Z) + \sin L(\mathfrak{L}'-\mathfrak{L}) = 0,$$

équation qui, combinée avec la deuxième (49), donne

$$(55)\qquad \varpi\sin L = -a\cos L\sin(Z'-Z);$$

d'où, en vertu de l'équation (51),

$$(56)\qquad -\frac{\varpi}{\mathfrak{P}}\sin L = \frac{V}{a}\sin(Z'-Z).$$

Posons, pour abréger,

$$(57)\qquad \bar{\zeta}[*] = \frac{V}{a}\sin(Z'-Z),\quad \text{d'où}\quad -\varpi\sin L = \mathfrak{P}\bar{\zeta};$$

l'équation (54) donnera, moyennant une transposition de termes,

$$(58)\qquad \frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{d\mu}{d\mathfrak{L}} - \frac{1}{\mathfrak{R}}\frac{d\varpi}{dL} = \bar{\zeta}.$$

Telle est la nouvelle forme que prend le troisième théorème sur les attractions locales.

Nommons, pour abréger, perturbations de la latitude et de la lon-

---

[*] *P. S.* Ne pas confondre ce ζ avec celui dont il a été fait usage dans le Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XII, 1867.

gitude produites par les attractions locales les quantités μ et ϖ, et de même perturbation de l'azimut la quantité $\bar{\zeta}$, qui n'en diffère que de quantités de l'ordre de l'aplatissement du sphéroïde terrestre; concevons deux surfaces dont les ordonnées, par rapport à la surface du sphéroïde, soient respectivement μ et ϖ; considérons l'intersection de la première de ces surfaces par le plan du premier vertical du point (L, $\mathfrak{L}$), et celle de la seconde surface par le méridien; menons les tangentes à ces courbes, aux points dont les coordonnées communes sont L, $\mathfrak{L}$: nous observerons que le premier terme de l'équation (58) est l'inclinaison de la première tangente sur l'horizontale dirigée vers l'ouest; le deuxième terme est égal, en faisant abstraction du signe qui le précède, à l'inclinaison de la deuxième tangente sur le côté nord de l'horizontale située dans le méridien. Si donc, eu égard à la petitesse de μ, ϖ et $\bar{\zeta}$, on substitue les angles à leurs tangentes ou sinus, on pourra énoncer le troisième théorème en ces termes : *L'inclinaison de la courbe des perturbations de la latitude sur l'horizon ouest, diminuée de l'inclinaison de la courbe des perturbations de la longitude sur l'horizon nord, est égale à la perturbation de l'azimut.*

Ce résultat nous a conduit à remplacer les latitudes et longitudes par les arcs de méridien et de parallèle.

Soient : m l'arc de méridien compris entre les latitudes L et L_i, p l'arc de parallèle à la latitude L, compris entre les méridiens de longitudes $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}_i$; nous aurons

$$(59) \qquad m = \int_{L_i}^{L} \mathfrak{R}\, dL\,[*], \quad p = \mathfrak{P}(\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_i),$$

d'où

$$(60) \qquad dm = \mathfrak{R} dL, \qquad dp = \mathfrak{P} d\mathfrak{L} + (\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_i)\, d\mathfrak{P},$$

et, en ayant égard aux relations (53) et (59),

$$(61) \qquad dp = \mathfrak{P} d\mathfrak{L} - \frac{p}{\mathfrak{P}} \sin L.\, \mathfrak{R}\, dL.$$

---

[*] *P. S.* La valeur de cette intégrale se déduira des Tables géodésiques qui donnent les arcs de méridien comptés de l'équateur, au moyen d'une simple soustraction

Au moyen de ces relations, jointes à la seconde équation (57), on éliminera aisément $\mathfrak{P}d\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{R}d\mathrm{L}$ de l'équation (50), et l'on aura

$$(62)\qquad -a\,d\Delta = (\mu - p\bar{\zeta})\,dm + \varpi\,dp.$$

L'équation de condition relative à l'intégralité de celle-ci peut s'écrire

$$(63)\qquad \frac{d\mu}{dp} - \left(\frac{d\varpi}{dm}\right) = \bar{\zeta} + p\,\frac{d\bar{\zeta}}{dp}\,[*].$$

Pour intégrer actuellement l'équation (62), nous allons former les expressions de μ, ϖ et $\bar{\zeta}$, suivant les puissances et produits de m et de p.

Posons en conséquence

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi &= \varpi_i + \mathrm{a}p + \mathrm{b}m + \mathrm{c}p^2 + \mathrm{e}pm + \mathrm{f}m^2 + \mathrm{g}p^3 + \mathrm{h}p^2m \\ &\qquad + \mathrm{k}pm^2 + \mathrm{l}m^3 + \ldots, \\ \mu &= \mu_i + \mathrm{a}'p + \mathrm{b}'m + \mathrm{c}'p^2 + \mathrm{e}'pm + \mathrm{f}'m^2 + \mathrm{g}'p^3 + \mathrm{h}'p^2m \\ &\qquad + \mathrm{k}'pm^2 + \mathrm{l}'m^3 + \ldots, \\ \bar{\zeta} &= \bar{\zeta}_i + \mathrm{a}''p + \mathrm{b}''m + \mathrm{c}''p^2 + \mathrm{e}''pm + \mathrm{f}''m^2 + \ldots; \end{aligned}\right.$$

nous aurons successivement

$$\frac{d\mu}{dp} = \mathrm{a}' + 2\mathrm{c}'p + \mathrm{e}'m + 3\mathrm{g}'p^2 + 2\mathrm{h}'pm + \mathrm{k}'m^2 + \ldots,$$

$$\left(\frac{d\varpi}{dm}\right) = \mathrm{b} + \mathrm{e}p + 2\mathrm{f}m + \mathrm{h}p^2 + 2\mathrm{k}pm + 3\mathrm{l}m^2 + \ldots,$$

$$p\,\frac{d\bar{\zeta}}{dp} = \mathrm{a}''p + 2\mathrm{c}''p^2 + \mathrm{e}''pm + \ldots,$$

$$\frac{d\mu}{dp} - \left(\frac{d\varpi}{dm}\right) = \mathrm{a}' - \mathrm{b} + (2\mathrm{c}' - \mathrm{e})p + (\mathrm{e}' - 2\mathrm{f})m + (3\mathrm{g}' - \mathrm{h})p^2 + (2\mathrm{h}' - 2\mathrm{k})pm + (\mathrm{k}' - 3\mathrm{l})m^2 + \ldots,$$

$$\bar{\zeta} + p\,\frac{d\bar{\zeta}}{dp} = \bar{\zeta}_i + 2\mathrm{a}''p + \mathrm{b}''m + 3\mathrm{c}''p^2 + 2\mathrm{e}''pm + \mathrm{f}''m^2 + \ldots.$$

---

[*] *P. S.* On peut, en suivant une autre voie, établir la relation (62) : par exemple en exprimant les dérivées $\left(\frac{d\Delta}{dm}\right)$ et $\frac{d\Delta}{dp}$ au moyen des dérivées de Δ relatives à L et $\mathfrak{L}$, et vérifier que l'équation de condition (63) s'accorde avec l'équation (58). C'est en vue de présenter ce mode de démonstration que nous avons compris sous une parenthèse la dérivée de ϖ par rapport à m; toutefois nous avons jugé superflu d'insister davantage sur ce point.

Or ces deux derniers développements devant être égaux, en vertu de l'équation de condition (63), quelles que soient les valeurs des variables p et m, on en déduit, entre les trois suites de coefficients, les relations

$$(65)\quad \begin{cases} a' - b = \bar{\zeta}_i, & 2c' - e = 2a'', \quad e' - 2f = b'', \\ 3g' - h = 3c'', & 2h' - 2k = 2e'', \quad k' - 3l = f'' \ldots \end{cases}$$

Substituant dans le développement de $\bar{\zeta}$ les valeurs de $\bar{\zeta}_i$, a'', b'', c'',... que donnent ces relations, on obtient cette expression

$$(66)\quad \begin{cases} \bar{\zeta} = \frac{V}{a}\sin(Z' - Z)[*] = a' - b + \left(c' - \frac{1}{2}e\right)p + (e' - 2f)m \\ \qquad + \left(g' - \frac{1}{3}h\right)p^2 + (h' - k)pm \\ \qquad + (k' - 3l)m^2 + \ldots. \end{cases}$$

Les inconnues ϖ_i, μ_i, a, b, c,...., a', b', c',... s'obtiendront en résolvant simultanément les deux premières équations (64) et l'équation (66), au moyen d'un nombre suffisant de systèmes de valeurs censées connues de ϖ, μ et $\bar{\zeta}$. Dans ces équations [**], les quantités observées sont engagées sous une forme qui rend immédiatement comparables les erreurs de leurs premiers membres. La possibilité de représenter les données au moyen d'un nombre beaucoup moindre de coefficients offrira un moyen de contrôle auquel concourront à la fois les longitudes, les latitudes et les azimuts.

Soit

$$(67)\qquad M = \mu - p\bar{\zeta};$$

d'où

$$M = \mu_i + bp + b'm + \frac{1}{2}ep^2 + 2fpm + f'm^2 + \frac{1}{3}hp^3 + kp^2m + 3lpm^2 + l'm^3 + \ldots;$$

---

[*] *P. S.* Pour utiliser les Tables géodésiques, on pourra remplacer ici $\frac{V}{a}$ par $\frac{a}{N}$.

[**] *P. S. Ajoutez :* et en y supposant la dernière multipliée par $a \cos L$.

l'équation (62) deviendra

$$(68) \qquad -a\,d\Delta = \mathrm{M}\,dm + \varpi\,dp.$$

On vérifiera aisément que la condition $\frac{d\mathrm{M}}{dp} = \left(\frac{d\varpi}{dm}\right)$ est satisfaite.

En appliquant à l'intégration de l'équation (68) le mode de calcul qui a été suivi à l'égard de l'équation (40), on obtient finalement [*]

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} a(\Delta_i - \Delta) = \varpi_i p + \mu_i m + \tfrac{1}{2}\mathrm{a}p^2 + \mathrm{b}pm + \tfrac{1}{2}\mathrm{b}'m^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{c}p^3 \\ + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}p^2 m + \mathrm{f}pm^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{f}'m^3 + \tfrac{1}{4}\mathrm{g}p^4 \\ + \tfrac{1}{3}\mathrm{h}p^3 m + \tfrac{1}{2}\mathrm{k}p^2 m^2 + \mathrm{l}pm^3 + \tfrac{1}{4}\mathrm{l}'m^4 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Ce développement, poussé jusqu'aux termes du quatrième ordre, sera sans doute suffisant, lorsque les distances en longitude et latitude

---

[*] *P. S.* La formule d'intégration de l'expression précédente est, en désignant par Δ_i la constante,

$$-a(\Delta - \Delta_i) = \int \mathrm{M}\,dm + \int \left(\varpi - \int \frac{d\mathrm{M}}{dp}\,dm\right) dp.$$

Voici le détail des calculs :

$$\frac{d\mathrm{M}}{dp} = \mathrm{b} + \mathrm{e}p + 2\mathrm{f}m + \mathrm{h}p^2 + 2\mathrm{k}pm + 3\mathrm{l}m^2 + \ldots,$$

$$\int \frac{d\mathrm{M}}{dp}\,dm = \mathrm{b}m + \mathrm{e}pm + \mathrm{f}m^2 + \mathrm{h}p^2 m + \mathrm{k}pm^2 + \mathrm{l}m^3 + \ldots,$$

$$\varpi - \int \frac{d\mathrm{M}}{dp}\,dm = \varpi_i + \mathrm{a}p + \mathrm{c}p^2 + \mathrm{g}p^3 + \ldots,$$

$$\int \left(\varpi - \int \frac{d\mathrm{M}}{dp}\,dm\right) dp = \varpi_i p + \tfrac{1}{2}\mathrm{a}p^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{c}p^3 + \tfrac{1}{4}\mathrm{g}p^4 + \ldots,$$

$$\int \mathrm{M}\,dm = \mu_i m + \mathrm{b}pm + \tfrac{1}{2}\mathrm{b}'m^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}p^2 m + \mathrm{f}pm^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{f}'m^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{h}p^3 m + \tfrac{1}{2}\mathrm{k}p^2 m^2 + \mathrm{l}pm^3 + \tfrac{1}{4}\mathrm{l}'m^4 + \ldots;$$

on en déduit la formule (69) du texte.

des stations au point central ne dépasseront pas $1\frac{1}{2}$ à 2 degrés. Dans tous les cas, la résolution des équations (64) et (66) permettra toujours de limiter les termes des développements au nombre convenable.

Les formules (47) ou (69) nous paraissent résoudre le problème des surfaces de niveau de la manière qui se prête le mieux aux exigences de la pratique.

Dans une autre Communication, nous examinerons l'influence que pourrait avoir sur les résultats la correction des éléments du calcul des positions géodésiques.

Remarques concernant l'emploi des séries trigonométriques dans la représentation des effets des attractions, et l'intégration de l'équation différentielle des surfaces de niveau.

Les avantages des développements algébriques qui ont été proposés dans le précédent Mémoire nous semblent assez évidents pour nous dispenser d'y revenir; aussi ne le ferons-nous pas : nous voulons seulement examiner ici comment on arriverait à vaincre certaines difficultés qui paraîtraient s'opposer à l'emploi des séries trigonométriques.

On a vu, dans l'avant-dernier Mémoire, comment le problème se simplifie lorsque, au lieu de rechercher l'équation des surfaces de niveau, on se propose tout d'abord de former l'équation d'un profil de ces surfaces; la détermination des divers profils équivaut en effet à celle de la surface entière dont ils font partie. Nous avons fait remarquer que, les stations astronomiques n'étant pas généralement échelonnées le long du profil considéré, il serait nécessaire de déduire, par voie d'interpolation, les valeurs des perturbations produites par les attractions locales, aux points du profil que l'on se propose de substituer aux stations astronomiques. Nous n'avons pas indiqué à cette occasion le mode d'interpolation auquel il conviendrait de recourir; or il est clair que cette lacune se trouve comblée par les développements contenus dans le dernier Mémoire. Supposons maintenant qu'on effectue les interpolations dont il s'agit et que, de plus, les points sub-

stitués aux stations astronomiques soient équidistants, tant dans le sens des méridiens que dans le sens des parallèles, et suffisamment rapprochés pour que toutes les inflexions de la surface de niveau puissent être convenablement représentées; il n'est pas difficile de reconnaître que, dans le cas d'un espace limité par des méridiens et des parallèles, les divers coefficients des développements trigonométriques pourront alors être obtenus, sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'ensemble des équations de condition. Dans ce cas, en effet, chacun de ces divers coefficients s'obtiendra au moyen d'une intégrale définie double, qui se calculera par des formules de quadrature convenablement appropriées au sujet.

Si, comme en réalité, l'espace considéré est limité par un contour irrégulier, tel que celui des continents ou des frontières, la solution ne pourra être ramenée à la précédente qu'en substituant, aux valeurs inconnues des perturbations dans les régions comprises entre les limites de la surface et les méridiens et parallèles circonscrits, des fonctions arbitraires assujetties d'ailleurs à l'équation de condition relative à l'intégrabilité : les résultats obtenus ne s'appliqueraient évidemment qu'aux points compris dans l'espace primitivement considéré.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur la solution fournie par les développements trigonométriques. D'une part, ils exigeraient, pour satisfaire à la condition d'équidistance des points, un nombre de stations bien plus considérable que le nombre nécessaire dans le cas des développements algébriques (ceux-ci n'exigeant le rapprochement des stations que dans les régions accidentées). D'autre part, il nous semble que la formation de l'équation générale de la surface de niveau n'offrirait, pour la discussion, aucun avantage sur les équations qui représentent cette surface dans des espaces plus limités.

Sur les fonctions entières irréductibles suivant un module premier, dans le cas où le degré est une puissance du module;

PAR M. J.-A. SERRET.

1. Dans un précédent Article (*voir* p. 301 de ce volume), j'ai fait connaître le mode de formation des fonctions entières irréductibles suivant un module premier, et dont le degré est précisément égal au module. Je me propose d'examiner ici le cas plus général des fonctions entières irréductibles, dont le degré est égal à une puissance quelconque du module premier p.

Posons, comme dans l'article cité,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X_\mu \equiv x^{p^\mu} - \frac{\mu}{1} x^{p^{\mu-1}} + \ldots + (-1)^k \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2\ldots k} x^{p^{\mu-k}} + \ldots \\ + (-1)^{\mu-1} \frac{\mu}{1} x^p + (-1)^\mu x \pmod{p}, \end{aligned}\right.$$

formule de laquelle résulte la congruence

$$(2)\qquad X_{\mu+1} \equiv X_\mu^p - X_\mu \pmod{p}.$$

La formule (1) peut s'écrire *symboliquement* de la manière suivante :

$$X_\mu \equiv (\xi - 1)^\mu \pmod{p},$$

en convenant que, après avoir effectué l'opération indiquée dans le second membre, on remplacera chaque puissance $\xi^{\mu-k}$ de ξ par $x^{p^{\mu-k}}$.

Alors, si l'indice μ est divisible par une puissance de p, et que l'on fasse

$$\mu = \nu p^m,$$

on aura symboliquement

$$X_{\nu p^m} \equiv (\xi - 1)^{\nu p^m} \equiv \left[(\xi - 1)^{p^m}\right]^\nu \equiv (\xi^{p^m} - 1)^\nu \pmod{p},$$

c'est-à-dire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} X_{\nu p^m} \equiv x^{p^{\nu p^m}} - \frac{\nu}{1} x^{p^{(\nu-1)p^m}} + \ldots + (-1)^k \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{1.2\ldots k} x^{p^{(\nu-k)p^m}} + \ldots \\ + (-1)^{\nu-1} \frac{\nu}{1} x^{p^{p^m}} + (-1)^\nu x \pmod{p}; \end{aligned}\right.$$

dans le cas de $\nu = 1$, on a

$$(4)\qquad X_{p^m} \equiv x^{p^{p^m}} - x \pmod{p}.$$

La formule (2) exprime que X_μ se change en $X_{\mu+1}$ quand on change x en $x^p - x$, c'est-à-dire en X_1; d'ailleurs la même formule se réduit, pour $\mu = 0$, à

$$X_1 = X_0^p - X_0,$$

ce qui montre qu'on doit regarder X_0 comme étant égal à x. Il résulte de là que, pour exécuter ρ fois de suite dans les formules (1) et (3) le changement de x en $x^p - x$, il suffit d'ajouter ρ unités aux indices des fonctions X qui y figurent. La formule (3) devient ainsi

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} X_{\nu p^m+\rho} \equiv X_\rho^{p^{\nu p^m}} - \frac{\nu}{1} X_\rho^{p^{(\nu-1)p^m}} + \ldots + (-1)^k \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{1.2\ldots k} X_\rho^{p^{(\nu-k)p^m}} + \ldots \\ + (-1)^{\nu-1} \frac{\nu}{1} X_\rho^{p^{p^m}} + (-1)^\nu X_\rho \pmod{p}. \end{aligned}\right.$$

2. Je désignerai généralement par V_n le produit de toutes les fonctions entières de degré p^n, irréductibles suivant le module p. D'après

la formule (4), ce produit est égal au quotient des deux fonctions X_{p^n}, $X_{p^{n-1}}$; ainsi l'on a

$$(6) \qquad X_{p^n} \equiv X_{p^{n-1}} V_n \pmod{p}.$$

Ensuite la formule (2) donne

$$\left.\begin{array}{l} X_{\mu+1} \equiv X_{\mu}^{p} - X_{\mu}, \\ X_{\mu+2} \equiv X_{\mu+1}^{p} - X_{\mu+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_{\mu+\nu} \equiv X_{\mu+\nu-1}^{p} - X_{\mu+\nu-1} \end{array}\right\} \pmod{p};$$

multipliant ces congruences entre elles et divisant la formule résultante par le produit $X_{\mu+1} X_{\mu+2} \dots X_{\mu+\nu-1}$, il vient

$$(7) \qquad X_{\mu+\nu} \equiv X_{\mu}(X_{\mu}^{p-1} - 1)(X_{\mu+1}^{p-1} - 1)\dots(X_{\mu+\nu-1}^{p-1} - 1) \pmod{p}.$$

Faisons

$$\mu = p^{n-1}, \quad \mu + \nu = p^n,$$

il viendra, à cause de la formule (6),

$$(8) \quad V_n \equiv (X_{p^{n-1}}^{p-1} - 1)(X_{p^{n-1}+1}^{p-1} - 1)(X_{p^{n-1}+2}^{p-1} - 1)\dots(X_{p^n-1}^{p-1} - 1) \pmod{p}.$$

Chacun des facteurs $X_{p^{n-1}+\lambda-1}^{p-1} - 1$ du second membre de la formule (8) se décompose en $p-1$ facteurs $X_{p^{n-1}+\lambda-1} - g$ où g a les valeurs $1, 2, \dots, p-1$, et cette dernière fonction est elle-même le produit de $p^{p^{n-1}+\lambda-n-1}$ facteurs irréductibles du degré p^n.

Il y a lieu de distinguer en plusieurs genres les fonctions entières irréductibles de degré p^n, ainsi que je l'ai fait déjà dans le cas particulier de $n=1$. Je nommerai fonctions du $\lambda^{ième}$ genre celles dont $X_{p^{n-1}+\lambda-1}^{p-1} - 1$ est le produit, λ ayant les valeurs

$$1, 2, 3, \dots, (p-1)p^{n-1},$$

et le dernier genre, celui qui répond à $\lambda = (p-1)p^{n-1}$, sera dit le *genre principal*.

Si l'on exécute le changement de x en $x^p - x$, dans le second

membre de la formule (8), chacun des $p^n - p^{n-1} - 1$ premiers facteurs entre parenthèses se changera dans le facteur suivant, d'après ce qui a été dit plus haut. Quant au dernier facteur $X_{p^{n-1}}^{p-1} - 1$, qui est le produit des fonctions irréductibles du genre principal, il se changera en $X_{p^n}^{p-1} - 1$, ce qui est le premier facteur de V_{n+1}, c'est-à-dire le produit des fonctions entières irréductibles du degré p^{n+1} et du premier genre. De cette considération résulte immédiatement le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* $F(x)$ *une fonction entière du degré* p^n, *irréductible suivant le module premier* p. *Si cette fonction appartient au* $\lambda^{ième}$ *genre supposé non principal, la fonction* $F(x^p - x)$ *ou* $F(X_1)$ *sera réductible, et elle se décomposera en* p *facteurs du degré* p^n, *irréductibles suivant le module* p *et appartenant au* $(\lambda + 1)^{ième}$ *genre. Mais, si la fonction* $F(x)$ *de degré* p^n *appartient au genre principal, la fonction* $F(x^p - x)$ *sera elle-même irréductible suivant le module* p, *et elle appartiendra au premier genre des fonctions de degré* p^{n+1}.

3. Considérons d'abord les fonctions entières irréductibles de degré p^n et du premier genre. Le produit de ces fonctions est

$$X_{p^{n-1}}^{p-1} - 1 \equiv \Pi(X_{p^{n-1}} - g) \pmod{p},$$

le signe de produit Π s'étendant aux valeurs $1, 2, \ldots, (p-1)$ de g. Le facteur $X_{p^{n-1}} - g$ est ce que devient $X_{p^{n-1}} - 1$ quand on y remplace x par $\frac{x}{g}$ et qu'on multiplie le résultat par g; il s'ensuit que la recherche des fonctions entières irréductibles du premier genre est ramenée à la décomposition en facteurs de la seule expression

$$(9) \qquad X_{p^{n-1}} - 1 \equiv x^{p^{p^{n-1}}} - x - 1 \pmod{p}.$$

Soient $F(x)$ l'un des facteurs irréductibles de la fonction (9) et i_n une racine de la congruence

$$(10) \qquad F(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

La racine i_n appartiendra aussi à la congruence

$$(11) \qquad X_{p^{n-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

et l'on aura en conséquence

$$(12) \qquad i_n^{p^{p^{n-1}}} - i_n \equiv 1 \pmod{p}.$$

En tenant compte de la formule (12), la congruence (11) peut s'écrire de la manière suivante :

$$(x - i_n)^{p^{p^{n-1}}} - (x - i_n) \equiv 0 \pmod{p},$$

et, par conséquent, les $p^{p^{n-1}}$ racines de cette congruence seront données par la formule

$$(13) \qquad x \equiv i_n + f(i_{n-1}) \pmod{p},$$

dans laquelle i_{n-1} désigne une racine d'une congruence irréductible quelconque de degré p^{n-1}, et f une fonction entière du degré $p^{n-1} - 1$, dont les coefficients peuvent avoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (p-1)$.

Parmi les valeurs de x comprises dans la formule (13), figurent les p^n racines de la congruence (10), et comme, d'après la théorie des congruences, l'une de ces racines est i_n^p, on aura

$$(14) \qquad i_n^p - i_n \equiv f(i_{n-1}) \pmod{p},$$

la fonction f devant être ici convenablement choisie. La formule (14) permet d'éliminer des expressions qui les contiennent les puissances de i_n au delà de la $(p-1)^{ième}$, en introduisant les diverses puissances de i_{n-1}.

De là on peut conclure que, si l'on désigne par

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$$

des racines de congruences irréductibles suivant le module p, dont les premiers membres soient des diviseurs des fonctions respectives

$$X_1 - 1, \quad X_p - 1, \quad X_{p^2} - 1, \ldots, \quad X_{p^{n-1}} - 1,$$

on aura

$$(15) \qquad \left.\begin{cases} i_1^p - i_1 \equiv 1, \\ i_2^p - i_2 \equiv P_1, \\ i_3^p - i_3 \equiv P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ i_n^p - i_n \equiv P_{n-1} \end{cases}\right\} \pmod{p},$$

P_μ étant une fonction entière des racines $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$, qui ne renferme aucune puissance de ces racines supérieure à la $(p-1)^{ième}$.

Il reste à connaître la condition que doivent remplir les fonctions P_μ pour que les valeurs de $i_1, i_2, \ldots, i_n$, définies par les formules (15), satisfassent effectivement aux congruences respectives

$$(16)\quad X_1 - 1 \equiv 0,\ X_p - 1 \equiv 0,\ X_{p^2} - 1 \equiv 0, \ldots,\ X_{p^{n-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pour remplir cet objet, nous aurons à nous appuyer sur un lemme que nous allons d'abord établir.

4. Lemme. — *Soit*

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_\nu\zeta^\nu$$

une fonction entière du degré $\nu < p$, *d'une quantité* ζ *racine de la congruence*

$$\zeta^{p^{p^m}} - \zeta \equiv 1 \pmod{p},$$

et dont les coefficients a, *réels ou imaginaires, satisfont tous à la congruence*

$$a^{p^{p^m}} - a \equiv 0 \pmod{p};$$

si l'on attribue à X_ρ *la valeur* $f(\zeta)$, *on aura*

$$X_{\nu p^m + \rho} \equiv 1.2\ldots\nu.a_\nu \pmod{p}.$$

La démonstration de ce lemme se déduit très-facilement de la formule (5), qui donne l'expression de $X_{\nu p^m+\rho}$ en fonction de X_ρ. Pour élever $f(\zeta)$ à la puissance $p^{(\nu-k)p^m}$, il faut répéter $\nu - k$ fois l'opération de l'élévation à la puissance p^{p^m}; or, d'après l'énoncé du lemme, cette opération change ζ en $\zeta + 1$ et elle laisse invariables les coefficients a; donc l'hypothèse $X_\rho = f(\zeta)$ entraîne

$$X_\rho^{p^{(\nu-k)p^m}} \equiv f(\zeta + \nu - k) \pmod{p},$$

et, à cause de la formule (5),

$$X_{\nu p^m+\rho} \equiv f(\zeta+\nu) - \frac{\nu}{1} f(\zeta+\nu-1) + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} f(\zeta+\nu-2) + \ldots$$
$$+ (-1)^{\nu-1} \frac{\nu}{1} f(\zeta+1) + (-1)^{\nu} f(\zeta) \pmod{p}.$$

Le second membre de cette congruence est la différence $\nu^{ième}$ de la fonction $f(\zeta)$ relative à la différence constante 1 attribuée à ζ; il a donc pour valeur

$$1.2.\ldots\nu.a_\nu,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Comme le produit $1.2.3\ldots(p-1)$ est congru à -1, suivant le module p, on déduit de ce qui précède le corollaire suivant, relatif au cas de $\nu = p-1$.

Corollaire. — *Si l'on attribue à* X_ρ *une valeur représentée par une fonction entière* $f(\zeta)$ *du degré* $p-1$, *d'une racine* ζ *de la congruence* $\zeta^{p^{p^m}} - \zeta \equiv 1 \pmod{p}$, *dont les coefficients a satisfassent à la congruence* $a^{p^{p^m}} - a \equiv 0 \pmod{p}$, *la fonction* $X_{p^{m+1}-p^m+\rho}$ *prendra une valeur congrue au coefficient changé de signe de la puissance* ζ^{p-1} *dans* $f(\zeta)$.

5. Revenons maintenant aux formules (15). Supposons les fonctions

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-2},$$

telles que $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ soient respectivement racines des $n-1$ premières congruences (16), et cherchons dans quel cas la valeur de i_n, définie par la dernière des formules (15), est racine de la dernière des congruences (16). Il est évident que cela revient à chercher dans quel cas la congruence

$$X_1 \equiv P_{n-1} \pmod{p}$$

entraîne

$$X_{p^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Désignons par $P^{(1)}_{n-1}$ le coefficient de i^{p-1}_{n-1} dans P_{n-1}, par $P^{(2)}_{n-1}$ le coefficient de i^{p-1}_{n-2} dans $P^{(1)}_{n-1}$, par $P^{(3)}_{n-1}$ le coefficient de i^{p-1}_{n-3} dans $P^{(2)}_{n-1}$, et ainsi de suite; le coefficient $P^{(n-1)}_{n-1}$ de i_1 dans $P^{(n-2)}_{n-1}$ sera un nombre entier.

Cela posé, le corollaire du lemme du n° 4 est applicable successivement dans les $n-1$ hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{llll}
m = n-2, & \rho = 1, & \zeta = i_{n-1}, & f(\zeta) = +P_{n-1}, \\
m = n-3, & \rho = p^{n-1} - p^{n-2} + 1, & \zeta = i_{n-2}, & f(\zeta) = -P^{(1)}_{n-1}, \\
m = n-4, & \rho = p^{n-1} - p^{n-3} + 1, & \zeta = i_{n-3}, & f(\zeta) = +P^{(2)}_{n-1}, \\
m = n-5, & \rho = p^{n-1} - p^{n-4} + 1, & \zeta = i_{n-4}, & f(\zeta) = -P^{(3)}_{n-1}, \\
\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
m = 0, & \rho = p^{n-1} - p + 1, & \zeta = i_1, & f(\zeta) = (-1)^{n-2} P^{(n-2)}_{n-1}.
\end{array}$$

Effectivement les conditions de ce corollaire, savoir :

$$\zeta^{p^{p^m}} - \zeta \equiv 1, \quad a^{p^{p^m}} - a \equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

sont remplies dans chacune de nos $n-1$ hypothèses; donc la congruence

$$X_1 \equiv P_{n-1} \quad (\text{mod. } p)$$

entraînera successivement les suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll}
X_{p^{n-1}-p^{n-2}+1} & \equiv -P^{(1)}_{n-1}, \\
X_{p^{n-1}-p^{n-3}+1} & \equiv +P^{(2)}_{n-1}, \\
X_{p^{n-1}-p^{n-4}+1} & \equiv -P^{(3)}_{n-1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\
X_{p^{n-1}-p+1} & \equiv (-1)^{n-2} P^{(n-2)}_{n-1}, \\
X_{p^{n-1}} & \equiv (-1)^{n-1} P^{(n-1)}_{n-1}
\end{array}\right\} \quad (\text{mod. } p),$$

et, par conséquent, pour avoir $X_{p^{n-1}} \equiv 1$ (mod. p), il faut et il suffit que

$$P^{(n-1)}_{n-1} \equiv (-1)^{n-1} \quad (\text{mod. } p),$$

c'est-à-dire que P_{n-1} contienne le terme $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \dots i_{n-1}^{p-1}$ avec le coefficient $(-1)^{n-1}$.

De là nous pouvons tirer la conclusion suivante :

Pour que les quantités $i_1, i_2, \ldots, i_n$, *définies par les formules* (15), *soient respectivement racines des congruences* (16), *il faut et il suffit que chaque fonction* P_μ *contienne le terme* $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$ *avec le coefficient* $(-1)^\mu$.

6. Il est facile maintenant d'établir une règle générale pour former les fonctions entières irréductibles du degré p^n et du premier genre.

La congruence irréductible de laquelle i_n dépend résulte de l'élimination de $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ entre les congruences (15). Cette quantité i_n étant l'une quelconque des racines de la congruence (11), si l'on désigne par g un entier quelconque, le produit gi_n représentera une racine d'une congruence irréductible quelconque du degré p^n et du premier genre. Faisant donc $gi_n = x$, la dernière des congruences (15) deviendra

$$X_1 \equiv P_{n-1} \pmod{p}, \tag{17}$$

P_{n-1} désignant ici une fonction entière de $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$, du degré $p-1$ par rapport à chacune de ces quantités, et dans laquelle le coefficient de $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_{n-1}^{p-1}$ est un entier quelconque autre que zéro.

D'un autre côté, on peut remplacer les racines $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$, qu'il faut éliminer de la formule (17), par $\frac{i_1}{g_1}, \frac{i_2}{g_2}, \ldots, \frac{i_{n-1}}{g_{n-1}}$, $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ étant des nombres entiers, et il est évident que cela revient à substituer aux $n-1$ premières congruences (15) les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} i_1^p - i_1 \equiv P_0, \\ i_2^p - i_2 \equiv P_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_{n-1}^p - i_{n-1} \equiv P_{n-2} \end{array}\right\} \pmod{p}, \tag{18}$$

où P_0 est un entier autre que zéro, et où P_μ n'est assujetti, généralement, qu'à la seule condition de renfermer le terme $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$ avec un coefficient différent de zéro.

Si l'on représente par

$$F_n(X_1) \equiv 0 \pmod{p}$$

le résultat de l'élimination de $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ entre les congruences (17) et (18), $F_n(X_1)$ ou $F_n(x^p - x)$ sera l'expression générale des fonctions entières, irréductibles, suivant le module p, du degré p^n et du premier genre.

On peut, sans diminuer la généralité du résultat, attribuer telles valeurs que l'on voudra aux coefficients des congruences (18), en excluant toutefois la valeur zéro pour le coefficient de $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$ dans P_μ. Effectivement, d'après l'analyse du n° 3, $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ ne sont que des auxiliaires assujetties à la seule condition d'être des racines de congruences irréductibles du premier genre et des degrés $p, p^2, \ldots, p^{n-1}$ respectivement; il n'y a donc pas dans $F_n(X_1)$ d'autres arbitraires que les coefficients de P_{n-1}.

La forme la plus générale que l'on puisse supposer à P_{n-1} est la suivante :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} P_{n-1} = {} & g\,(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_1^2 + \ldots + a_{p-2} i_1^{p-2} + i_1^{p-1}) \\ & \times (a_0^{(1)} + a_1^{(1)} i_2 + a_2^{(1)} i_2^2 + \ldots + a_{p-2}^{(1)} i_2^{p-2} + i_2^{p-1}) \\ & \times (a_0^{(2)} + a_1^{(2)} i_3 + a_2^{(2)} i_3^2 + \ldots + a_{p-2}^{(2)} i_3^{p-2} + i_3^{p-1}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times (a_0^{(n-2)} + a_1^{(n-2)} i_{n-1} + a_2^{(n-2)} i_{n-2}^2 + \ldots + a_{p-2}^{(n-2)} i_{n-1}^{p-2} + i_{n-1}^{p-1}), \end{aligned}\right.$$

$g, a_0, a_1, \ldots, a_{p-2}$ étant des entiers arbitraires, et $a_0^{(\mu)}, a_1^{(\mu)}, \ldots, a_{p-2}^{(\mu)}$ des fonctions entières de $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ du degré $p-1$, au plus, par rapport à chacune de ces quantités. Il y a donc dans P_{n-1} un nombre de coefficients arbitraires égal à p^{n-1}; mais il est facile de voir que ce nombre doit être diminué, pour notre objet, de $n-1$ unités. En effet les congruences (18) ne changent pas quand on y remplace

$$i_1, \quad i_2, \quad i_3, \ldots, \quad i_{n-1}$$

respectivement par

$$i_1 + h_1, \quad i_2 + h_2 + Q_1, \quad i_3 + h_3 + Q_2, \ldots, \quad i_{n-1} + h_{n-1} + Q_{n-2},$$

$h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ étant des entiers arbitraires et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2}$ des fonctions convenablement choisies, de même nature que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-2}$. Si l'on désigne par P'_μ ce que devient P_μ par le changement dont

il s'agit, la fonction Q_μ sera déterminée par la congruence

$$Q_\mu^p - Q_\mu \equiv P'_\mu - P_\mu \pmod{p},$$

dont le second membre ne renferme pas le terme $i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_\mu^{p-1}$; il s'ensuit, d'après l'analyse du n° 5, que Q_μ sera exprimable en fonction des seules quantités $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$.

Il est donc permis d'exécuter le même changement dans le second membre P_{n-1} de la congruence (17); la forme (19) de P_{n-1} sera conservée, mais on pourra disposer des indéterminées $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ pour faire disparaître $n-1$ termes, par exemple, les parties constantes des coefficients de $i_1^{p-2}, i_2^{p-2}, \ldots, i_{n-1}^{p-2}$ dans les divers facteurs entre parenthèses de la formule (19); ainsi donc il est permis de supposer que a_{p-2} est nul et que les coefficients $a_{p-2}^{(\mu)}$ n'ont pas de terme constant. Alors notre expression de P_{n-1} ne renferme plus que $p^{n-1} - n + 1$ coefficients; chacun de ceux-ci peut avoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (p-1)$, à l'exception du coefficient g, qui ne prend que les valeurs $1, 2, \ldots, (p-1)$. Il s'ensuit que le nombre des fonctions $F_n(X_1)$ est $(p-1)p^{p^{n-1}-n}$, ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu plus haut.

Je dois rappeler ici que, dans mon premier Article, j'ai donné l'expression des fonctions irréductibles de degré p. En changeant x en $x^p - x$ dans les fonctions du genre principal, on obtiendra immédiatement, par le théorème du n° 2, les fonctions entières irréductibles du degré p^2 et du premier genre.

7. Si l'on veut se borner à la recherche d'une seule fonction entière irréductible du degré p^n, le plus simple sera, en général, de réduire P_{n-1} au seul terme qui doit y figurer nécessairement, ou à ce terme augmenté d'une constante. Ainsi l'on prendra, pour la congruence (17),

$$X_1 \equiv \pm i_1^{p-1} i_2^{p-1} \ldots i_{n-1}^{p-1} - g \pmod{p},$$

g étant une constante quelconque.

Considérons, par exemple, le cas de $n = 2$. On posera

$$i_1^p - i_1 \equiv 1, \quad X_1 \equiv i_1^{p-1} - 1 \equiv \frac{1}{i_1} \pmod{p};$$

remplaçant donc i_1 par $\frac{1}{X_1}$ dans la première congruence, il vient

$$X_1^p + X_1^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ainsi $X_1^p + X_1^{p-1} - 1$, c'est-à-dire $(x^p - x)^p + (x^p - x)^{p-1} - 1$, est une fonction irréductible du degré p^2 et du premier genre.

Considérons encore le cas de $n = 3$. Nous poserons

$$i_1^p - i_1 \equiv 1, \quad i_2^p - i_2 \equiv i_1^{p-1} - 1 \equiv \frac{1}{i_1}, \quad X_1 \equiv i_1^{p-1} i_2^{p-1} - 1 \pmod{p},$$

et nous ferons en outre

$$i_1 i_2 = \frac{1}{z},$$

d'où

$$z^{p-1} \equiv \frac{1}{X_1 + 1} \pmod{p}.$$

On tire de ces formules

$$\frac{\frac{1}{z^p}}{i_1^p} \equiv \frac{\frac{1}{z} + 1}{i_1} \equiv \frac{\frac{1}{z^p} - \frac{1}{z} - 1}{1} \pmod{p},$$

d'où

$$i_1 \equiv \frac{1 + z}{X_1 - z}, \quad i_1^p \equiv \frac{X_1 + 1}{X_1 - z} \pmod{p},$$

et l'élimination de i_1 donne

$$\frac{X_1(X_1 + 1)(X_1^p + X_1^{p-1} - 1) - X_1 z + z^2}{z(X_1 - z)} \equiv 0 \pmod{p},$$

ou, en désignant par z_1, z_2 les valeurs de z qui annulent le numérateur,

$$\frac{(z_1 - z)(z_2 - z)}{z(X_1 - z)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Multiplions entre elles la précédente congruence et celles qu'on déduit de celle-ci par le changement de z en $2z, 3z, \ldots, (p-1)z$; remplaçons ensuite z^{p-1} par $\frac{1}{X_1 + 1}$; il viendra

$$\frac{(X_1 + 1)^2 (z_1 z_2)^{p-1} - (X_1 + 1)(z_1^{p-1} + z_2^{p-1} - X_1^{p-1})}{X_1^p + X_1^{p-1} - 1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Faisons, pour abréger l'écriture,

$$P = X_1(X_1 + 1)(X_1^p + X_1^{p-1} - 1),$$

$$Q = X_1^{p-3} + \frac{4}{2} X_1^{p-5} P + \ldots + \frac{(\mu+2)(\mu+3)\ldots 2\mu}{2.3.\ldots\mu} X_1^{p-2\mu-1} P^{\mu-1} + \ldots$$
$$+ \frac{\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\ldots p-1)}{2.3\ldots\frac{p-1}{2}} P^{\frac{p-3}{2}},$$

on aura

$$z_1 z_2 \equiv P, \quad z_1^{p-1} + z_2^{p-1} \equiv X_1^{p-1} + PQ \pmod{p},$$

et notre congruence deviendra

$$(X_1 + 1)^3 X_1 P^{p-2} - (X_1 + 1)^2 X_1 Q - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Le premier membre de cette congruence est une fonction entière irréductible du degré p^3 et du premier genre.

8. Les formules (15) du n° **5** peuvent être regardées comme définissant un premier groupe de fonctions entières irréductibles du premier genre et des degrés respectifs $p, p^2, \ldots, p^n$. Nous allons montrer, en terminant cet Article, de quelle manière les fonctions irréductibles du degré p^n des divers genres se rattachent à ce groupe fondamental.

Revenons donc à la formule (8) et considérons l'un quelconque des facteurs de son second membre. Posons

$$(20) \qquad Z_\mu \equiv X_\mu^{p-1} - 1 \pmod{p};$$

l'indice μ a l'une quelconque des valeurs

$$p^{n-1}, \quad p^{n-1} + 1, \quad p^{n-1} + 2, \ldots, \quad p^n - 1;$$

nous le supposerons mis sous la forme

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \ldots + \alpha_{n-1} p^{n-1},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ étant des entiers positifs ou nuls et inférieurs à p.

Désignons par ξ_0 un entier arbitraire, et faisons généralement

$$(21)\quad \xi_{k+1} \equiv a_0^{(k)} + a_1^{(k)} i_{k+1} + a_2^{(k)} i_{k+1}^2 + \ldots + a_{\alpha_k - 1}^{(k)} i_{k+1}^{\alpha_k - 1} + i_{k+1}^{\alpha_k} \pmod{p},$$

a_0^k, $a_1^k, \ldots$ étant des fonctions entières de $i_1, i_2, \ldots, i_k$ qui se réduisent à des entiers dans le cas de $k = 0$; la quantité ξ_{k+1} se réduira elle-même à l'unité dans le cas de $\alpha_k = 0$. Quant aux racines $i_1, i_2, \ldots, i_n$, elles sont, je le répète, définies par les formules (15).

Cela posé, je dis que les $(p-1)p^\mu$ racines de la congruence

$$(22)\qquad Z_\mu \equiv 0 \pmod{p}$$

sont données par la formule

$$(23)\qquad x \equiv \xi_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \pmod{p},$$

dont le second membre est effectivement susceptible de $(p-1)p^\mu$ valeurs différentes. Deux de ces valeurs de x sont nécessairement distinctes, car leur différence est une fonction de degré inférieur à p par rapport aux quantités i qui y figurent, et notamment par rapport à celle i_m de ces quantités qui a le plus grand indice. Si donc la différence dont nous parlons était congrue à zéro, i_m serait racine d'une congruence de degré inférieur à p^m, ce qui n'a pas lieu.

D'après cela, il nous suffit de prouver que la valeur (23) de x satisfait à la congruence (22), et nous y parvenons sans difficulté au moyen du lemme du n° 4.

Faisons, pour abréger,

$$\mu_k = \alpha_0 + \alpha_1 p + \ldots + \alpha_k p^k$$

et

$$A_k = 1.2\ldots\alpha_{n-1} \times 1.2\ldots\alpha_{n-2} \times \ldots \times 1.2\ldots\alpha_k;$$

si l'on applique le lemme du n° 4 dans les n hypothèses suivantes :

$m = n-1$,	$\nu = \alpha_{n-1}$,	$\rho = 0$,	$\zeta = i_n$.	$f(\zeta) = \xi_0 \xi_1 \ldots \xi_{n-1} \xi_n$,
$m = n-2$,	$\nu = \alpha_{n-2}$,	$\rho = \mu - \mu_{n-2}$,	$\zeta = i_{n-1}$,	$f(\zeta) = A_{n-1} \xi_0 \xi_1 \ldots \xi_{n-1}$,
$m = n-3$,	$\nu = \alpha_{n-3}$,	$\rho = \mu - \mu_{n-3}$,	$\zeta = i_{n-2}$,	$f(\zeta) = A_{n-2} \xi_0 \xi_1 \ldots \xi_{n-2}$,
.....,	.....,	.....,	.....,	.....,
$m = 0$.	$\nu = \alpha_0$,	$\rho = \mu - \mu_0$,	$\zeta = i_1$,	$f(\zeta) = A_1 \xi_0 \xi_1$,

on reconnaîtra que la formule (23) entraîne successivement les suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} X_{\mu-\mu_{n-2}} & \equiv A_{n-1}\,\xi_0\,\xi_1\ldots\xi_{n-1}, \\ X_{\mu-\mu_{n-3}} & \equiv A_{n-2}\,\xi_0\,\xi_1\ldots\xi_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{\mu-\mu_0} & \equiv A_1\,\xi_0\,\xi_1, \\ X_\mu & \equiv A_0\,\xi_0 \end{array}\right\} \pmod{p},$$

et, puisque X_μ se réduit ainsi à une constante, il est évident que la congruence (22) est satisfaite.

La formule (23) définit, avec les formules (15), les congruences irréductibles des divers genres de degré p^n. Celles-ci s'obtiennent effectivement en éliminant $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de la formule (23). Par les motifs indiqués au n° 6, on peut, en vue de cette élimination, supposer nulle la partie constante du coefficient de l'avant-dernier terme des fonctions ξ.

FIN DU TOME DIX-HUITIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

QA
1
J684
sér.2
t.18
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

Journal de mathématiques
pures et appliquées